collegebatch.com

click to campus

JEE Advanced 2020 Question Paper with Solution

Joint Entrance Examination – Advanced

Paper	Page No.
JEE Advanced 2020 Question Paper 1	2 - 67
JEE Advanced 2020 Question Paper 2	68 - 133

Download more JEE Advanced Previous Year Question Papers: Click Here

JEE ADVANCED
27 September 2020
Physics Paper - 1

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks	: +3	If ONLY the correct option is chosen;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –1	In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

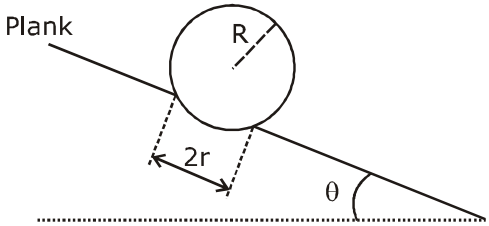
- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +3	केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक	: –1	अन्य सभी स्थितियों में।

---

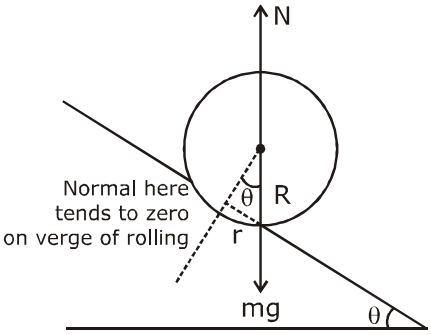
1. A football of radius R is kept on a hole of radius r $(r < R)$ made on a plank kept horizontally. One end of the plank is now lifted so that it gets tilted making an angle θ from the horizontal as shown in the figure below. The maximum value of θ so that the football does not start rolling down the plank satisfies (figure is schematic and not drawn to scale)

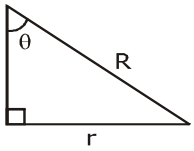
R त्रिज्या की एक फुटबॉल क्षैतिज रूप से रखे एक तख्ते पर बने r $(r < R)$ त्रिज्या के एक छिद्र पर रखी जाती हैं। तख्ते का एक सिरा अब उठाया (lifted) जाता है ताकि यह चित्रानुसार क्षैतिज से θ कोण बनाते हुए झुकता है। θ का अधिकतम मान ताकि फुटबॉल तख्ते के नीचे लुढ़कना प्रारंभ नहीं करती है, संतुष्ट करता है (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)



(A) $\sin\theta = \frac{r}{R}$ (B) $\tan\theta = \frac{r}{R}$ (C) $\sin\theta = \frac{r}{2R}$ (D) $\cos\theta = \frac{r}{2R}$

Sol. **A**



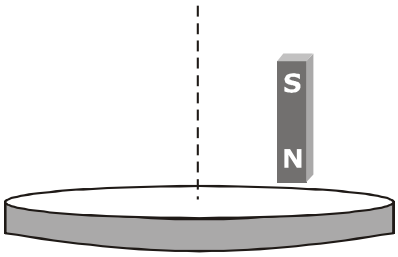


$\sin\theta = \frac{r}{R}$

on the verge of rolling 'mg' passes through point of contact.

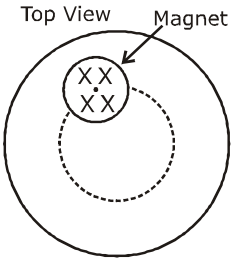
2. A light disc made of aluminium (a nonmagnetic material) is kept horizontally and is free to rotate about its axis as shown in the figure. A strong magnet is held vertically at a point above the disc away from its axis. On revolving the magnet about the axis of the disc, the disc will (figure is schematic and not drawn to scale)

एल्युमिनियम (एक अचुम्बकीय पदार्थ) की बनी एक हल्की चकती क्षैतिज रूप से रखी जाती है तथा चित्रानुसार इसके अक्ष के परितः घूमने के लिए स्वतन्त्र है। एक प्रबल (strong) चुम्बक चकती के ऊपर एक बिन्दु पर इसके अक्ष से दूर ऊर्ध्वाधर रखी जाती है। चकती के अक्ष के परितः चुम्बक को घुमाने पर चकती (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)



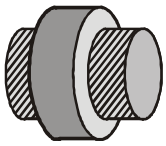
(A) rotate in the direction opposite to the direction of magnet's motion
(B) rotate in the same direction as the direction of magnet's motion
(C) not rotate and its temperature will remain unchanged
(D) not rotate but its temperature will slowly rise
(A) चुम्बक की गति की दिशा के विपरित दिशा में घूमेगी
(B) चुम्बक की गति की दिशा के समान दिशा में घूमेगी
(C) नहीं घूमेगी तथा इसका तापमान अपरिवर्तित रहेगा
(D) घूमेगी लेकिन इसका तापमान धीरे–धीरे बढ़ेगा

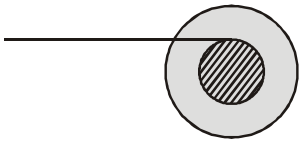
Sol. **B**

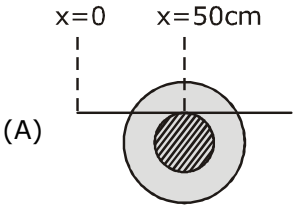


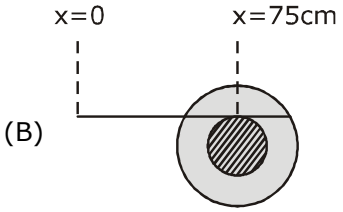
by lenz's law, the disc also tries to move in same direction because in the backward part of disc the flux reduces as magnet moves and as there is change in magnetic flux, so there is eddy current production which leads to production of heat.

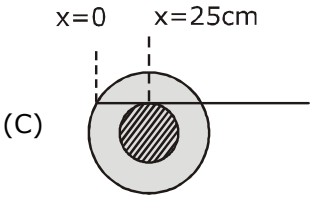
3. A small roller of diameter 20 cm has an axle of diameter 10 cm (see figure below on the left). It is on a horizontal floor and a meter scale is positioned horizontally on its axle with one edge of the scale on top of the axle (see figure on the right). The scale is now pushed slowly on the axle so that it moves without slipping on the axle, and the roller starts rolling without slipping. After the roller has moved 50 cm, the position of the scale will look like (figures are schematic and not drawn to scale)
20 cm व्यास के एक छोटे रोलर में 10 cm (नीचे बायीं ओर चित्र देखिये) व्यास की एक धुरी (axle) है। यह एक क्षैतिज फर्श पर है तथा एक मीटर पैमाना इसकी धुरी पर क्षैतिज रूप से स्थित है, जिसमें धुरी के शिखर पर (दायीं ओर देखिये) पैमाने का एक किनारा (edge) है। अब पैमाने को धुरी पर धीरे–धीरे धकेला जाता है ताकि यह धुरी पर बिना फिसले चले, तथा रोलर बिना फिसले लुढ़कना प्रारंभ करता है। रोलर के 50 cm चलने के पश्चात् पैमाने की स्थिति निम्न तरह दिखाई देगी (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)

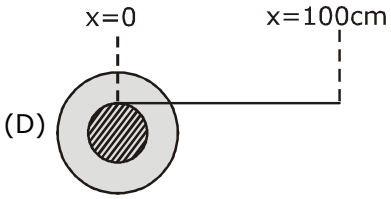












Sol. **B**

$v - \omega R = 0$

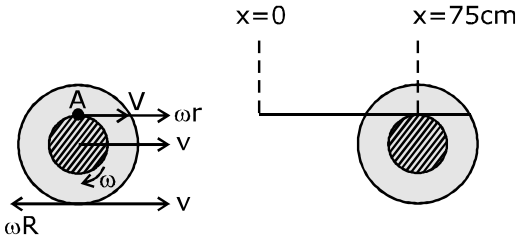
$v = \omega R$

$v = 20\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{20}$

Velocity of point (A) $= v + \omega r$

$= v + \frac{v}{20} \times 10$

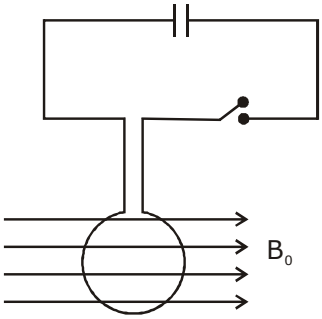
$= \frac{3v}{2} = 1.5v$



so distance moved by point of contact
$= 1.5 \times 50$ cm $= 75$ cm

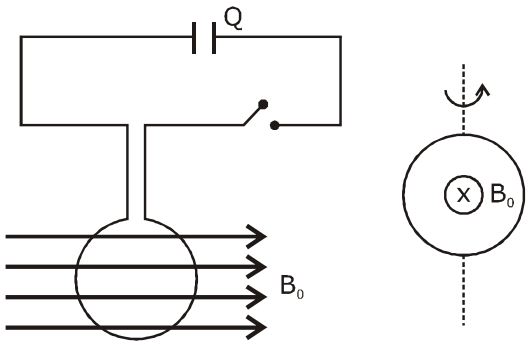
4. A circular coil of radius R and N turns has negligible resistance. As shown in the schematic figure, its two ends are connected to two wires and it is hanging by those wires with its plane being vertical. The wires are connected to a capacitor with charge Q through a switch. The coil is in a horizontal uniform magnetic field B_0 parallel to the plane of the coil. When the switch is closed, the capacitor gets discharged through the coil in a very short time. By the time the capacitor is discharged fully, magnitude of the angular momentum gained by the coil will be (assume that the discharge time is so short that the coil has hardly rotated during this time)

R त्रिज्या तथा N फेरों की एक वृत्ताकार कुण्डली का नगण्य प्रतिरोध है। सांकेतिक चित्र में दिखायेनुसार, इसके दो सिरे दो तारों से जोड़े जाते है तथा यह उन तारों द्वारा लटकाया जाता है, जिसका तल ऊर्ध्वाधर हो। तार एक स्विच के माध्यम से आवेश Q के साथ एक संधारित्र से जोड़े जाते है। कुण्डली इसके (स्वयं के) तल के समानान्तर क्षैतिज समरूप चुम्बकीय क्षेत्र B_0 में है। जब स्विच बन्द किया जाता है, तब संधारित्र बहुत अल्प समय में कुण्डली से निरावेशित होता है। जब तक संधारित्र पूर्ण रूप से निरावेशित होता है, तब तक कुण्डली द्वारा प्राप्त कोणीय संवेग का परिमाण होगा (माना कि निरावेशन समय इतना अल्प है कि कुण्डली इस समय के दौरान मुश्किल से घूमती है।) –



(A) $\frac{\pi}{2}NQB_0R^2$ (B) πNQB_0R^2 (C) $2\pi NQB_0R^2$ (D) $4\pi NQB_0R^2$

Sol. **B**



after closing switch, within fraction of seconds entire charge flows through coil and produces impulsive torque.

$\int \tau dt = \Delta L$

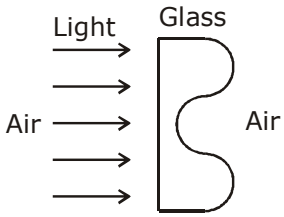
$\int NBIAdt = \Delta L$

$NB\pi R^2 Q = \Delta L$

$\pi NQB_0R^2 = \Delta L$

5. A parallel beam of light strikes a piece of transparent glass having cross section as shown in the figure below. Correct shape of the emergent wavefront will be (figures are schematic and not drawn to scale)

प्रकाश का एक समानान्तर पुंज चित्रानुसार अनुप्रस्थ काट रखने वाले पारदर्शी कांच के एक टुकड़े पर टकराता है। निर्गत तरंगाग्र का सही आकार होगा (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)



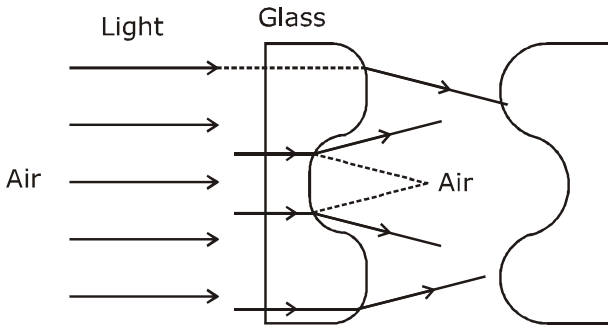
(A)

(B)

(C)

(D)

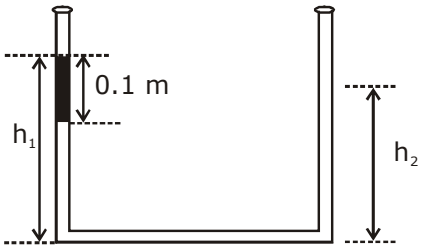
Sol. **A**



Concept : based on Huyghen's principle.
Theory of wavefront → wave moves such that direction of propagation is perpendicular to wavefront.

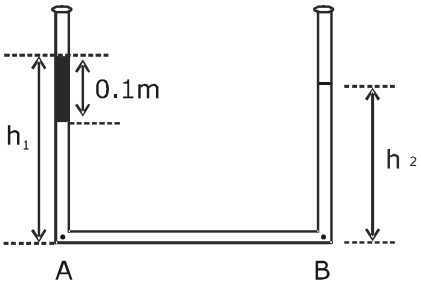
6. An open-ended U-tube of uniform cross-sectional area contains water (density 10^3kg m^{-3}). Initially the water level stands at 0.29 m from the bottom in each arm. Kerosene oil (a water-immiscible liquid) of density 800 kg m^{-3} is added to the left arm until its length is 0.1 m, as shown in the schematic figure below. The ratio $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$ of the heights of the liquid in the two arms is

समरूप अनुप्रस्थ–काट क्षेत्रफल की एक खुले सिरे की U-नली पानी (घनत्व 10^3kg m^{-3}) धारण करती है। प्रारंभ में पानी का स्तर प्रत्येक भुजा में तली से 0.29 m पर स्थित है। 800 kg m^{-3} घनत्व का केरासीन तेल (एक पानी–अमिश्रणीय द्रव) बायीं भुजा में मिलाया जाता है जब तक इसकी लम्बाई 0.1 m ना हो, जैसा नीचे सांकेतिक चित्र में दिखायेनुसार है। दोनों भुजाओं में द्रव की ऊँचाईयों का अनुपात $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$ है–



(A) $\frac{15}{14}$ (B) $\frac{35}{33}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{5}{4}$

Sol. **B**



$P_A = P_B$ (Same horizontal level)

$$P_{atm} + \rho_{kero} g \times 0.1 + \rho_w g(h_1 - 0.1) = P_{atm} + \rho_w g h_2$$

$$800 \times 0.1 + 1000(h_1 - 0.1) = 1000 h_2$$

$$0.8 + 10h_1 - 1 = 10h_2$$

$$10(h_1 - h_2) = 0.2$$

$h_1 - h_2 = 0.02$ ...(1)

also, initial level of water in both arms = 2×0.29

$$\therefore \; h_1 - 0.1 + h_2 = 0.58$$

$h_1 + h_2 = 0.68$ ....(2)

from (1) & (2)

$h_1 = 0.35$ & $h_2 = 0.33$

so $\frac{h_1}{h_2} = \frac{35}{33} \rightarrow$ option (B)

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four options(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme :</u>

Full marks	: +4	If only (all) the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4	यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3	यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2	यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1	यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2	अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. A particle of mass m moves in circular orbits with potential energy V(r)= Fr, where F is a positive constant and r is its distance from the origin. Its energies are calculated using the Bohr model. If the radius of the particle's orbit is denoted by R and its speed and energy are denoted by v and E, respectively, then for the n^{th} orbit (here h is the Planck's constant)

(A) $R \propto n^{1/3}$ and $v \propto n^{2/3}$ (B) $R \propto n^{2/3}$ and $v \propto n^{1/3}$

(C) $E = \frac{3}{2}\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2m}\right)^{1/3}$ (D) $E = 2\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2m}\right)^{1/3}$

m द्रव्यमान का एक कण V(r)= Fr स्थितिज ऊर्जा के साथ वृत्तीय कक्षाओं में गति करता है, जहाँ F एक धनात्मक नियतांक है तथा r मूल बिन्दु से इसकी दूरी है। इसकी ऊर्जायें बोहर प्रतिरूप का प्रयोग करते हुए ज्ञात की जाती हैं। यदि कण की कक्षा की त्रिज्या R से निरूपित की जाती है तथा इसकी चाल तथा ऊर्जा क्रमशः v व E से निरूपित की जाती है, तब nवीं कक्षा के लिए (यहाँ h प्लांक नियतांक है)

(A) $R \propto n^{1/3}$ तथा $v \propto n^{2/3}$ (B) $R \propto n^{2/3}$ तथा $v \propto n^{1/3}$

(C) $E = \frac{3}{2}\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2m}\right)^{1/3}$ (D) $E = 2\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2m}\right)^{1/3}$

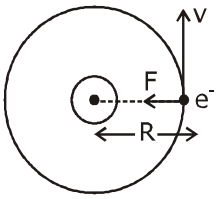
Sol. **B,C**

P.E., V(r) = Fr

$\therefore$ Force $= \frac{-dV}{dr}$

$= - F$

$F = \frac{mv^2}{R}$ ...(1)



$mvR = \frac{nh}{2\pi}$ ...(2)

$\Rightarrow R = \frac{nh}{2\pi mv}$ $\Rightarrow F = \frac{mv^2}{\frac{nh}{2\pi mv}}$ $\Rightarrow F = \frac{m^2v^3.2\pi}{nh} \Rightarrow v^3 = \frac{nFh}{2\pi m^2} \Rightarrow V\alpha n^{\frac{1}{3}}$

from (2) $R = \frac{nh}{2\pi mv}$

$R = \frac{kn}{n^{\frac{1}{3}}}$

$R \propto n^{\frac{2}{3}}$

E = KE + PE

$= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{1}{2}FR + FR$

$= \frac{3}{2}FR = \frac{3}{2}.F \times \frac{nh}{2\pi m\left(\frac{nFh}{2\pi m^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$

$E = \frac{3}{2}\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2m}\right)^{\frac{1}{3}}$

Option B and C.

8. The filament of a light bulb has surface area 64 mm^2. The filament can be considered as a black body at temperature 2500 K emitting radiation like a point source when viewed from far. At night the light bulb is observed from a distance of 100 m. Assume the pupil of the eyes of the observer to be circular with radius 3 mm. Then
(Take Stefan-Boltzmann constant = $5.67\times10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$, Wien's displacement constant = 2.90×10^{-3} m-K, Planck's constant = 6.63×10^{-34} Js, speed of light in vacuum = $3.00\times10^{8}\ ms^{-1}$)
(A) power radiated by the filament is in the range 642 W to 645 W
(B) radiated power entering into one eye of the observer is in the range 3.15×10^{-8} W to 3.25×10^{-8} W
(C) the wavelength corresponding to the maximum intensity of light is 1160 nm
(D) taking the average wavelength of emitted radiation to be 1740 nm, the total number of photons entering per second into one eye of the observer is in the range 2.75×10^{11} to 2.85×10^{11}
एक प्रकाश बल्ब के तन्तु (filament) का पष्ठ क्षेत्रफल 64 mm^2 है। तन्तु 2500 K ताप पर एक कष्णिका के रूप में माना जा सकता है, जो एक बिन्दु स्त्रोत की तरह विकिरण उत्सर्जित करता है जब दूर से देखा जाता है। रात में प्रकाश बल्ब 100 m की दूरी से प्रेक्षित किया जाता है। माना प्रेक्षक की आँखों की पुतली वत्ताकार है, जिसकी त्रिज्या 3 mm हैं। तब
(लीजिये : स्टीफन–बोल्टजमान नियतांक = $5.67\times10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$, वीन का विस्थापन नियतांक = 2.90×10^{-3} m-K, प्लांक नियतांक = 6.63×10^{-34} Js, निर्वात में प्रकाश की चाल = $3.00\times10^{8}\ ms^{-1}$)
(A) तन्तु द्वारा विकिरित शक्ति 642 W से 645 W परास में है।
(B) प्रेक्षक की एक आँख में प्रवेश करने वाली विकिरत शक्ति 3.15×10^{-8} W से 3.25×10^{-8} W परास में है।
(C) प्रकाश की अधिकतम तीव्रता के संगत तरंगदैर्ध्य 1160 nm है।
(D) उत्सर्जित विकिरण की औसत तरंगदैर्ध्य 1740 nm लेने पर, प्रेक्षक की एक आँख में प्रति सैकण्ड प्रवेश करने वाले फोटोनों की कुल संख्या 2.75×10^{11} से 2.85×10^{11} की परास में है।

Sol. **B,C,D**

$P = e\sigma AT^4$

$= 1\times 5.67\times10^{-8}\times 64\times(2500)^4 = 141.75\ W$

radiated power entering one's eye $= \frac{P}{4\pi R^2}\times \pi r^2$

$= \frac{141.75\times(3\times10^{-2})^2}{4\times(100)^2} = 318.9\times10^{-10} = 3.19\times10^{-8}\ W \rightarrow$ option (B)

for wavelength corresponding to maximum intensity,

$\lambda_m T = b$

$\lambda_m = \frac{2.93\times10^{-6}}{2500} = 1160nm \rightarrow$ option (C)

for no of photons, per sec,

$N\frac{hc}{\lambda} = P$

$N = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{3.19\times10^{-8}\times1740\times10^{-9}}{6.67\times10^{-34}\times3\times10^{8}} = 2.77\times10^{11}$ Option (D).

Ans. BCD

9. Sometimes it is convenient to construct a system of units so that all quantities can be expressed in terms of only one physical quantity. In one such system, dimensions of different quantities are given in terms of a quantity X as follows: [position] = [X^{α}]; [speed] = [X^{β}]; [acceleration] =[X^{p}]; [linear momentum] = [X^{q}]; [force] = [X^{r}]. Then

कभी–कभी इकाईयों की एक पद्धति का निर्माण करना सुविधाजनक होता है ताकि सभी राशियां केवल एक भौतिक राशि के पदो में व्यक्त की जा सकती है। एक ऐसी पद्धति में, भिन्न–भिन्न राशियों की विमायें X राशी के पदों में निम्न रूप में जाती है : [स्थिति] = [X^{α}]; [चाल] = [X^{β}]; [त्वरण] =[X^{p}]; [रेखीय संवेग] = [X^{q}]; [बल] = [X^{r}], तब –

(A) $\alpha + p = 2\beta$ (B) $p + q - r = \beta$ (C) $p - q + r = \alpha$ (D) $p + q + r = \beta$

Sol. **A,B**

Position = [x^{α}]

$\Rightarrow [L] = [X^{\alpha}]$ ...(1)

speed = X^{β}

$LT^{-1} = X^{\beta}$

$X^{\alpha} T^{-1} = X^{\beta}$ (from (1))

$T^{-1} = X^{\beta-\alpha}$ ...(2)

acceleration = X^{P}

$LT^{-1} \times T^{-1} = X^{p}$

$X^{\beta}.X^{\beta-\alpha} = x^{P}$

$X^{2\beta-\alpha} = x^{P}$

$\Rightarrow 2\beta - \alpha = p$

$\alpha + p = 2\beta$

Option (A)

[Linear momentum] = x^{q}

$M\ LT^{-1} = x^{q}$

$M.X^{\beta} = x^{q}$

$M = x^{q-\beta}$ ...(3)

[force] = x^{r}

$M\ LT^{-2} = x^{r}$

$M.X^{p} = x^{r}$

$M = x^{r-p}$ ..(4)

from (3) & (4) , $q-\beta = r - p$

$p + q - r = \beta$ option (B)

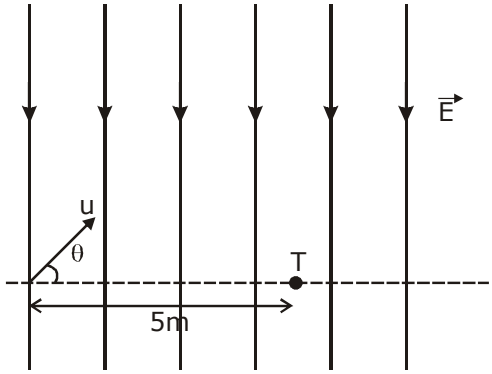
from (A) $p + q - r = \frac{\alpha}{2} + \frac{p}{2}$

$\frac{p}{2} + q - r = \frac{\alpha}{2}$

Ans :- A,B

10. A uniform electric field, $\vec{E} = -400\sqrt{3}\hat{y}\,NC^{-1}$ is applied in a region. A charged particle of mass m carrying positive charge q is projected in this region with an initial speed of $2\sqrt{10}\times10^{6}\,ms^{-1}$. This particle is aimed to hit a target T, which is 5 m away from its entry point into the field as shown schematically in the figure. Take $\frac{q}{m} = 10^{10}\,Ckg^{-1}$. Then

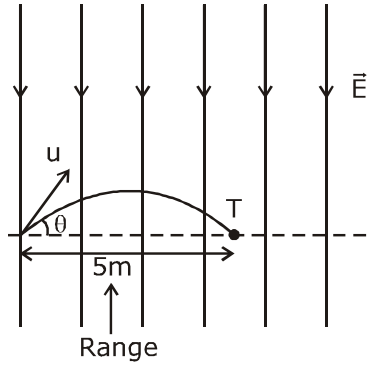
एक समरूप विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = -400\sqrt{3}\hat{y}\,NC^{-1}$ एक क्षेत्र में आरोपित किया जाता है। q धनात्मक आवेश को वहन करने वाले m द्रव्यमान का एक आवेशित कण $2\sqrt{10}\times10^{6}\,ms^{-1}$ की प्रारंभिक चाल से इस क्षेत्र में प्रक्षेपित किया जाता है। इस कण का एक लक्ष्य T से टकराने (hit) के लिए निशाना बांधा जाता है, जो चित्रानुसार क्षेत्र में (into) इसके प्रवेश बिन्दु से 5 m दूर है। $\frac{q}{m} = 10^{10}\,Ckg^{-1}$ लें। तब–



(A) the particle will hit T if projected at an angle 45º from the horizontal
(B) the particle will hit T if projected either at an angle 30º or 60º from the horizontal
(C) time taken by the particle to hit T could be $\sqrt{\frac{5}{6}}\,\mu s$ as well as $\sqrt{\frac{5}{2}}\,\mu s$
(D) time taken by the particle to hit T is $\sqrt{\frac{5}{3}}\,\mu s$

(A) कण T से टकरायेगा, यदि क्षैतिज से 45º कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है।
(B) कण T से टकरायेगा, यदि क्षैतिज से 30º या 60º कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है।
(C) T से टकराने के लिए कण द्वारा लिया गया समय $\sqrt{\frac{5}{6}}\,\mu s$ तथा $\sqrt{\frac{5}{2}}\,\mu s$ हो सकता है।
(D) T से टकराने के लिए कण द्वारा लिया गया समय $\sqrt{\frac{5}{3}}\,\mu s$ है।

Sol. B,C



Consider like projectile motion,

so here $g_{eff} = \frac{qE}{m} = 400\sqrt{3} \times 10^{10}$

$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g_{eff}}$

$5 = \frac{4 \times 10 \times 10^{12} \times \sin 2\theta}{400\sqrt{3} \times 10^{10}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\theta = 60°, 120°$

$\therefore \theta = 30°, 60°$

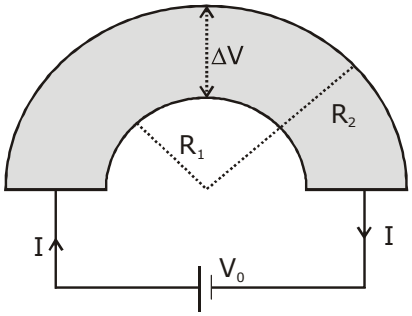
$T = \frac{2u \sin \theta}{g_{eff}}$

at $\theta = 30°, T = \frac{2 \times 2\sqrt{10} \times 10^6 \times \frac{1}{2} \times 10^6}{400\sqrt{3} \times 10^{10}} \mu s = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3} \times 4} = \sqrt{\frac{10}{12}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \mu s$

at $\theta = 60°$, $T = \sqrt{\frac{5}{2}} \mu s$ Ans. B and C

11. Shown in the figure is a semicircular metallic strip that has thickness t and resistivity ρ . Its inner radius is R_1 and outer radius is R_2. If a voltage V_0 is applied between its two ends, a current I flows in it. In addition, it is observed that a transverse voltage ΔV develops between its inner and outer surfaces due to purely kinetic effects of moving electrons (ignore any role of the magnetic field due to the current). Then (figure is schematic and not drawn to scale)

चित्रानुसार एक अर्धवत्तीय धात्विक पट्टिका है, जिसकी मोटाई t तथा प्रतिरोधकता ρ है। इसकी आंतरिक त्रिज्या R_1 है तथा बाह्य त्रिज्या R_2 है। यदि एक वोल्टता V_0 इसके दोनों सिरों के बीच आरोपित की जाती है, तब एक धारा I इसमें बहती हैं। इसके सिवा, यह प्रेक्षित किया जाता है कि गतिमान इलेक्ट्रॉनों (धारा के कारण चुम्बकीय क्षेत्र की कोई भी भूमिका उपेक्षित है) के शुद्ध गतिक प्रभावों के कारण इसकी आन्तरिक और बाह्य सतहों के बीच एक अनुप्रस्थ वोल्टता ΔV उत्पन्न होती है। तब (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)



(A) $I = \frac{V_0 t}{\pi\rho} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

(B) the outer surface is at a higher voltage than the inner surface

(C) the outer surface is at a lower voltage than the inner surface

(D) $\Delta V \propto I^2$

(A) $I = \frac{V_0 t}{\pi\rho} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

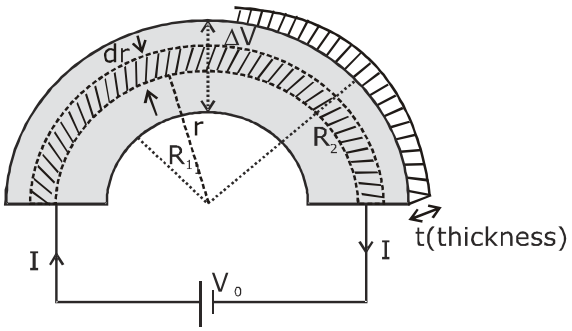
(B) बाह्य सतह, आंतरिक सतह से उच्च वोल्टता पर है।

(C) बाह्य सतह, आंतरिक सतह से न्यून वोल्टता पर है।

(D) $\Delta V \propto I^2$

Sol. **A,C,D**

to calculate resistance, $\ell = \pi r$, $A = tdr$



$$dR = \frac{\rho \pi r}{tdr}$$

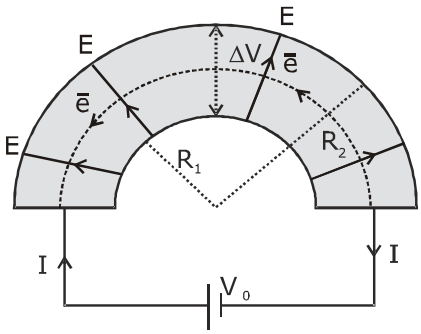
but all elemental strips are in parallel so

$$\frac{1}{R_{eq}} = \int \frac{1}{dR}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{tdr}{\rho \pi r}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{t}{\rho \pi} \ell n \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\therefore I = \frac{V_0}{R_{eq.}} = \frac{V_0 t \ell n}{\pi \rho} (R_2 / R_1) \qquad \text{Option (A)}$$

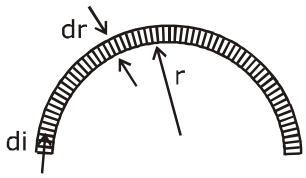


electrons move in a circular path so they exp. centripetal force due to electric field set up because of p.d., so 'E' field should be from inner to outer, therefore outer surface is at lower voltage than inner.

To check p.d. across surface, let us consider elemental resistance

$$dR = \frac{\rho \pi r}{tdr}$$

$\therefore di = \frac{v_0 tdr}{\rho \pi r}$

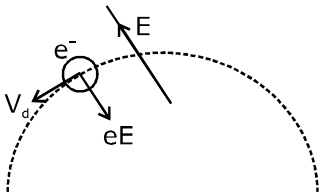


$neAv_d = \frac{V_0 tdr}{\rho \pi r}$

(as A=tdr)

$\Rightarrow V_d = \frac{V_0}{\rho \pi rne} = \frac{KV_0}{r}$

Now as electrons move in circular path so,



$eE = \frac{mv_d^2}{r}$

$E = \frac{m}{er} \times \frac{K^2 V_0^2}{r^2}$

$E = \frac{K'.V_0^2}{r^3}$

$\therefore$ p.d., $\Delta V = -\int \vec{E}.\overrightarrow{dr}$

$\Delta V = -K'V_0^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3}$

$\Delta V = K'V_0^2 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$

$\Delta V = K''V_0^2$

$\Rightarrow \Delta V \alpha V_0^2$

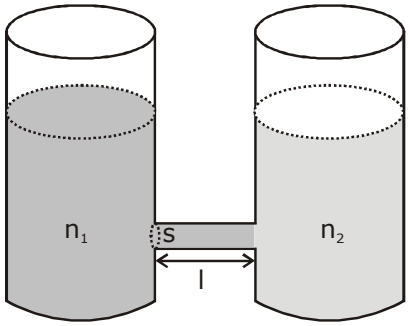
$\Delta V \alpha I^2$

(as $V_0 \alpha I$)

Ans. Option ACD

12. As shown schematically in the figure, two vessels contain water solutions (at temperature T) of potassium permanganate ($KMnO_4$) of different concentrations n_1 and n_2 ($n_1 > n_2$) molecules per unit volume with $\Delta n = (n_1 - n_2) \ll n_1$. When they are connected by a tube of small length l and cross-sectional area S, $KMnO_4$ starts to diffuse from the left to the right vessel through the tube. Consider the collection of molecules to behave as dilute ideal gases and the difference in their partial pressure in the two vessels causing the diffusion. The speed v of the molecules is limited by the viscous force $-\beta v$ on each molecule, where β is a constant. Neglecting all terms of the order $(\Delta n)^2$, which of the following is/are correct? (k_B is the Boltzmann constant)

चित्र में व्यवस्थिक रूप से दिखायेनुसार, दो पात्र प्रति इकाई आयतन अणुओं n_1 तथा n_2 ($n_1 > n_2$) की भिन्न–भिन्न सान्द्रताओं के पोटेशियम परमेंग्नेट ($KMnO_4$) के पानी के विलयन (T ताप पर) धारण करते है, जहाँ $\Delta n = (n_1 - n_2) \ll n_1$ हैं। जब वे S अनुप्रस्थ–काट क्षेत्रफल तथा l लघु लम्बाई की एक नली द्वारा जोड़े जाते है, तब $KMnO_4$ नली के माध्यम से बांयी से दांयी ओर विसरित (diffuse) होना प्रारम्भ होता हैं। माना अणुओं का समूह तनु (dilute) आदर्श गैसों के रूप में व्यवहार करता है तथा दोनों पात्रों में उनके आंशिक दाब में अन्तर के कारण विसरण होता है। अणुओं की चाल v प्रत्येक अणु पर $-\beta v$ श्यान बल द्वारा सीमित की जाती है, जहाँ β एक नियतांक है। क्रम $(\Delta n)^2$ के सभी पद नगण्य है, निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे सही है? (k_B बोल्टजमान नियतांक है)



(A) the force causing the molecules to move across the tube is $\Delta n k_B T S$

(B) force balance implies $n_1 \beta v l = \Delta n k_B T$

(C) total number of molecules going across the tube per sec is $\left(\frac{\Delta n}{l}\right)\left(\frac{k_B T}{\beta}\right) S$

(D) rate of molecules getting transferred through the tube does not change with time

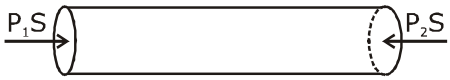
(A) नली से पार (across) जाने के लिए अणुओं के कारण बल $\Delta n k_B T S$ है।

(B) बल संतुलन बताता है कि $n_1 \beta v l = \Delta n k_B T$

(C) प्रति सैकण्ड नली के पार (across) जाने वाले अणुओं की कुल संख्या $\left(\frac{\Delta n}{l}\right)\left(\frac{k_B T}{\beta}\right) S$ है।

(D) नली से स्थानान्तरित होने वाले अणुओं की दर समय के साथ नही बदलती है।

Sol. **A,B,C**



$F = \Delta PS$

$= (P_1 - P_2)S$

$= n_1K_BTS - n_2K_BTS$

$= (n_1 - n_2)K_B\ TS \Rightarrow \Delta n K_B\ TS \Rightarrow \Delta n K_B\ TS$ (Option - A)

$(PV = NK_BT$
$P = \frac{N}{V}K_BT$
$P = nK_BT)$

where
N = total no. of particles
n = no. of molecules per unit volume.

$\beta v \times (n_1 \times S \times \ell) = \Delta n k_B .T.S$

$\Rightarrow n_1\beta v\ell = \Delta n k_B T$

Option (B).

N = total no of molecules,

$\frac{dN}{dt} = S \times v \times n_1$

$= S \times \frac{\Delta n K_B T}{\beta \ell}$ (from (B) putting vn_1)

correct option (C)

as Δn decreses with time so no of molecules decreases with time, option (D) not current.

Ans. ABC.

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, truncate/round -off the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;
Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।
शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

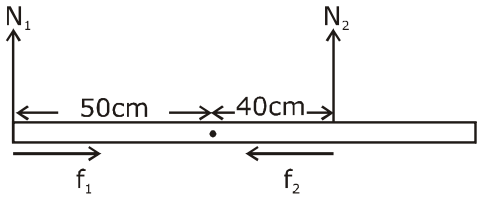
13. Put a uniform meter scale horizontally on your extended index fingers with the left one at 0.00 cm and the right one at 90.00 cm. When you attempt to move both the fingers slowly towards the center, initially only the left finger slips with respect to the scale and the right finger does not. After some distance, the left finger stops and the right one starts slipping. Then the right finger stops at a distance x_R from the center (50.00 cm) of the scale and the left one starts slipping again. This happens because of the difference in the frictional forces on the two fingers. If the coefficients of static and dynamic friction between the fingers and the scale are 0.40 and 0.32, respectively, the value of x_R (in cm) is _____.

अपनी विस्तत तर्जनीयों पर क्षैतिज रूप से एक समरूप मीटर पैमाने को बांयी ओर 0.00 cm पर तथा दांयी ओर 90.00 cm पर रखें। जब आप दोनों उंगुलीयों को धीरे–धीरे केन्द्र की ओर ले जाने का प्रयास करते है, तब प्रारम्भ में केवल बांयी उंगली पैमाने के सापेक्ष फिसलती है तथा दांयी उंगली नही फिसलती है। कुछ दूरी पश्चात, बांयी उंगली रूक जाती है तथा दांयी उंगली फिसलना प्रारम्भ करती है। तब दांयी उंगली पैमाने के केन्द्र (50.00 cm) से x_R दूरी पर रूकती है तथा बांयी उंगली पुनः फिसलना प्रारम्भ करती हैं। यह, दोनों उंगलियों पर घर्षण बलो में अन्तर के कारण होता हैं। यदि उंगलियों तथा पैमाने के बीच स्थैतिक व गतिक घर्षण गुणांक क्रमशः 0.40 व 0.32 है, तब x_R का मान (cm में) है _____.

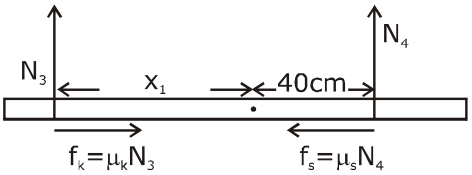
Sol. **25.60**

FBD of Rod

(Initial)



by balancing torque, we conclude $N_2 > N_1$, so $f_2 > f_1$



as rod does not move, only left finger slips,

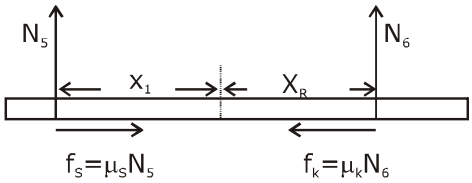
so $F_{net} = 0$ $\quad \mu_K N_3 = \mu_S N_4$

$0.32N_3 = 0.40\ N_4$ ....(1)

$\tau_{net_{about\ center}} = 0$, $x_1 N_3 = 40N_4$ ....(2)

dividing eq. (1)by(2)

$$\frac{0.32}{x_1} = \frac{0.40}{40} \Rightarrow x_1 = 32\text{cm}$$



$= F_{net} = 0$, $\quad \mu_s N_5 = \mu_k N_6$

$0.40N_5 = 0.32N_6$ ...(3)

$\tau_{net} = 0$, $\quad N_5 x_1 = N_6 x_R$ ...(4)

about centre

div eq.(3) by eq.(4), $\dfrac{0.40}{x_1} = \dfrac{0.32}{x_R}$

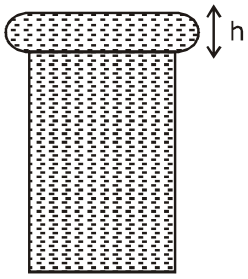
$$\frac{0.40}{32\text{cm}} = \frac{0.32}{x_R}$$

$$\Rightarrow X_R = \frac{32 \times 32}{40} = \frac{128}{5} = 25.60\text{cm}$$

Ans. 25.60

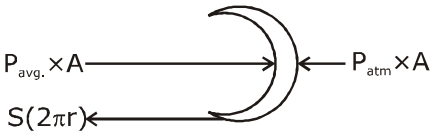
14. When water is filled carefully in a glass, one can fill it to a height h above the rim of the glass due to the surface tension of water. To calculate h just before water starts flowing, model the shape of the water above the rim as a disc of thickness h having semicircular edges, as shown schematically in the figure. When the pressure of water at the bottom of this disc exceeds what can be withstood due to the surface tension, the water surface breaks near the rim and water starts flowing from there. If the density of water, its surface tension and the acceleration due to gravity are 10^3kg m^{-3}, 0.07 Nm^{-1} and 10 ms^{-2}, respectively, the value of h (in mm) is _____.

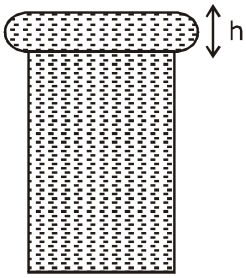
जब पानी एक कांच के गिलास (glass), में सावधानी पूर्वक भरा जाता है, कोई एक पानी के पष्ठ तनाव के कारण गिलास (glass) की रिम के ऊपर h ऊँचाई तक इसे भर सकता हैं। पानी के बहने प्रारम्भ होने के ठीक पहले h की गणना के लिये, चित्रानुसार अर्धवतीय किनारों वाली h मोटाई की एक चकती के जैसे रिम के उपर पानी के आकार को ढालते (model) है। जब इस चकती की तली पर पानी का दाब पष्ठ तनाव के कारण दाब से बढ़ता (exceeds) है, तब पानी की सतह रिम के नजदीक टूटती है तथा पानी वहां से बहना प्रारम्भ करता है। यदि पानी का घनत्व इसका पष्ठ तनाव तथा गुरूत्वीय त्वरण क्रमशः 10^3kg m^{-3}, 0.07 Nm^{-1} तथा 10 ms^{-2} है।। तब h का मान (mm में) है _____.



Sol. **3.74**

Let radius of disc = 'r'





[A = projected area = $h(2\pi r)$]

(after balancing effect of P_{atm} on both sides)

$S \times 2\pi r = P_{avg.} \times h(2\pi r)$

$$S = \left(\frac{\rho g h}{2}\right) \times h$$

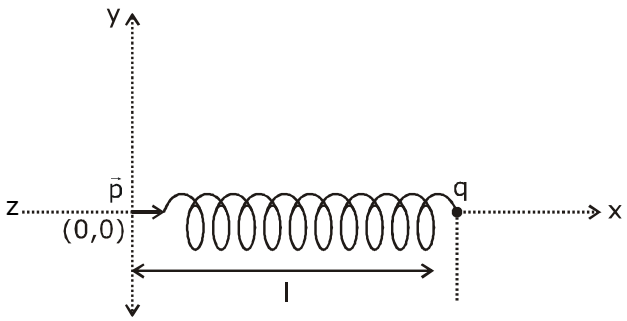
$$\frac{2S}{\rho g} = h^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{2S}{\rho g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.07}{10^3 \times 10}} = \sqrt{14} \times 10^{-3} m = 3.74 mm$$

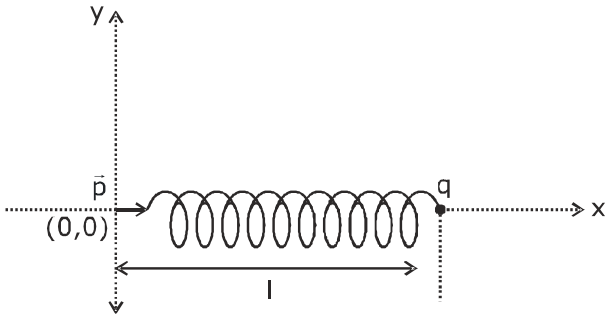
Ans. = 3.74

15. One end of a spring of negligible unstretched length and spring constant k is fixed at the origin (0,0). A point particle of mass m carrying a positive charge q is attached at its other end. The entire system is kept on a smooth horizontal surface. When a point dipole $\vec{p}$ pointing towards the charge q is fixed at the origin, the spring gets stretched to a length l and attains a new equilibrium position (see figure below). If the point mass is now displaced slightly by $\Delta l \ll l$ from its equilibrium position and released, it is found to oscillate at frequency $\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{k}{m}}$. The value of δ is _____.

k स्प्रिंग नियतांक तथा नगण्य अविस्तारित लम्बाई की एक स्प्रिंग का एक सिरा मूल बिन्दु (0,0) पर स्थिर है। q धनात्मक आवेश वहन करने वाला m द्रव्यमान का एक बिन्दु कण इसके दूसरें पर जोड़ा जाता है। सम्पूर्ण निकाय एक चिकनी क्षैतिज सतह पर रखा जाता है। जब एक बिन्दु द्विध्रुव $\vec{p}$ आवेश q की ओर निर्देशित है, जो मूल बिन्दु पर स्थिर है। स्प्रिंग l लम्बाई तक प्रसारित होती है तथा चित्रानुसार एक नई साम्यावस्था प्राप्त करती है। यदि अब बिन्दु द्रव्यमान इसकी साम्यावस्था से $\Delta l \ll l$ द्वारा हल्के से विस्थापित होता है तथा छोड़ा जाता है, तब यह $\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{k}{m}}$ आवति पर दोलन के लिए पाया जाता है। δ का मान है _____.



Sol. **3.14**



as we know, for spring block system,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}},$$

so we can also observe 'k' as $\left|\frac{d^2U}{dx^2}\right|$ from eq.

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

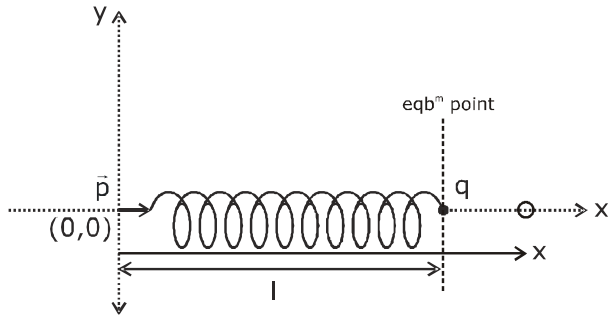
$$\frac{dU}{dx} = Kx$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = K$$

so we can say,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{d^2U/dx^2}{m}}$$

so by above concept let us find P.E., (U) of system from eqb^m.
As given, negligible unstretched length, so spring length is elongated length only.



$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{p \times q}{4\pi \epsilon_0 x^2} \quad ....(1)$$

$$\frac{dU}{dx} = kx - \frac{2pq}{4\pi \epsilon_0 x^3}$$

(for eqb^m, $\frac{dU}{dx} = 0$) given eqb^m at $x = \ell$

$\therefore K\ell = \dfrac{2pq}{4\pi \in_0 \ell^3}$ ...(2)

diff. eq(1) again, $\dfrac{d^2U}{dx^2} = K + \dfrac{6pq}{4\pi \in_0 x^4}$

as eqb^m at $x = \ell$, $\therefore \left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{at\ n=\ell} = K + \dfrac{6pq}{4\pi \in_0 \ell^4}$

(from (2) put value of $\dfrac{2pq}{4\pi \in_0 \ell^3}$)

$\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{at\ x=\ell} = k + 3K = 4K$

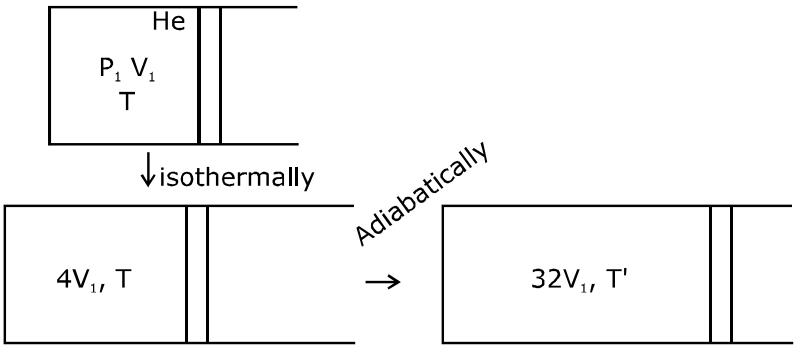
$\therefore f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{d^2U/dx^2}{m}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4K}{m}} = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\therefore \delta = \pi$ = 3.14 Ans.

16. Consider one mole of helium gas enclosed in a container at initial pressure P_1 and volume V_1. It expands isothermally to volume $4V_1$. After this, the gas expands adiabatically and its volume becomes $32V_1$. The work done by the gas during isothermal and adiabatic expansion processes are W_{iso} and W_{adia}, respectively. If the ratio $\dfrac{W_{iso}}{W_{adia}} = f\ln 2$, then f is _____.

माना हीलीयम गैस का एक मोल प्रारम्भिक दाब P_1 तथा आयतन V_1 पर एक पात्र में संलग्न (enclosed) हैं। यह समतापीय रूप से $4V_1$ आयतन तक प्रसारित होता है। इसके पश्चात गैस रूद्धोष्म रूप से प्रसारित होती है तथा इसका आयतन $32V_1$ हो जाता हैं। समतापीय तथा रूद्धोष्म प्रसार प्रक्रम के दौरान गैस द्वारा किया गया कार्य क्रमशः $W_{\text{समतापीय}}$ तथा $W_{\text{रूद्धोष्म}}$ है। यदि अनुपात $\dfrac{W_{\text{समतापीय}}}{W_{\text{रूद्धोष्म}}} = f\ln 2$ है, तब f है-

Sol. 1.77



$TV^{\gamma-1}$ = Constant, $\gamma = \frac{5}{3}$

$T' = T\left(\frac{4V_1}{32V_1}\right)^{\frac{5}{3}-1}$

$= T\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{T}{4}$

$W_{adb.} = \frac{nR(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$

$= \frac{nR\left(T - \frac{T}{4}\right)}{\frac{5}{3} - 1}$

$= \frac{3}{2}nR \times \frac{3T}{4} = \frac{9}{8}nRT$

Now work done in isoth.;

$$W_{iso} = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$= nRT \ln\left(\frac{4V_1}{V_1}\right)$$

$$= 2nRT \ln 2$$

$$\frac{W_{iso}}{W_{adb}} = \frac{2nRT \ln 2}{\frac{9}{8}nRT}$$

$$= \frac{16}{9}\ln 2$$

$$\therefore \quad f = \frac{16}{9} = 1.77$$

17. A stationary tuning fork is in resonance with an air column in a pipe. If the tuning fork is moved with a speed of 2 ms^{-1} in front of the open end of the pipe and parallel to it, the length of the pipe should be changed for the resonance to occur with the moving tuning fork. If the speed of sound in air is 320 ms^{-1}, the smallest value of the percentage change required in the length of the pipe is _____.

एक स्थिर स्वरित्र द्विभुज एक पाईप में एक वायु स्तम्भ के साथ अनुनाद में है। यदि स्वरित्र द्विभुज पाईप के खुलें सिरें के सामने तथा इसके समानान्तर 2 ms^{-1} की चाल से गतिमान है, तब गतिमान स्वरित्र द्विभुज के साथ अनुनाद घटित होने के लिए पाईप की लम्बाई परिवर्तित होना चाहिए। यदि हवा में ध्वनि की चाल 320 ms^{-1} है, तब पाईप की लम्बाई में आवश्यक प्रतिशत परिवर्तन का लघुतम मान है _____.

Sol. **0.62**

For open pipe resonance, $f = \frac{nv}{4L}$

Let us consider for n = 1,
initial length of pipe = L_1 for f_1

$$\left(f_1 = \frac{V}{4L_1}\right) \qquad .....(1)$$

Now due to Doppler's effect,

$$f_2 = \left(\frac{320}{320-2}\right)f_1$$

$$f_2 = \left(\frac{320}{318}\right) f_1 \qquad .....(2)$$

$$\therefore \quad f_2 = \frac{v}{4L_2} \qquad .....(3)$$

$$\frac{320}{318} \times \frac{V}{4L_1} = \frac{V}{4L_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L_2}{L_1} = \frac{318}{320}$$

% charge in length,

$$\frac{\Delta L}{L} \times 100\% = \left(\frac{L_1 - L_2}{L_1}\right) \times 100\%$$

$$= \left(1 - \frac{L_2}{L_1}\right) \times 100\%$$

$$= \left(1 - \frac{318}{320}\right) \times 100\%$$

$$= \frac{200}{320}\% = \frac{5}{8}\% = 0.625\%$$

$= 0.62\%$

Ans. 0.62

18. A circular disc of radius R carries surface charge density $\sigma(r) = \sigma_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, where σ_0 is a constant and r is the distance from the center of the disc. Electric flux through a large spherical surface that encloses the charged disc completely is ϕ_0. Electric flux through another spherical surface of radius $\frac{R}{4}$ and concentric with the disc is ϕ. Then the ratio $\frac{\phi_0}{\phi}$ is_____.

R त्रिज्या की एक वतीय चकती पष्ठ आवेश घनत्व $\sigma(r) = \sigma_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ का वहन करती है, जहाँ σ_0 एक नियतांक है तथा r चकती के केन्द्र से दूरी हैं। एक बड़े गोलीय पष्ठ से गुजरने वाला फलस्क जो आवेशित चकती को पूर्णतः संलग्न करता है, ϕ_0 है। चकती के साथ संकेन्द्रीय तथा $\frac{R}{4}$ त्रिज्या के अन्य गोलीय पष्ठ से गुजरने वला फलस्क ϕ है। तब अनुपात $\frac{\phi_0}{\phi}$ है_____.

Sol. 6.4

Charge in the elemental ring = $\int_{r=0}^{r} \sigma 2\pi r dr$

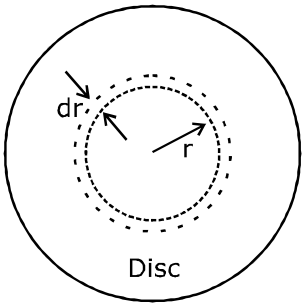
$\phi_0 = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$ (charge enclosed completely, so r = R)

& $\phi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$ (.. .. upto $r = \frac{R}{4}$)

$q = \int_0^r \sigma_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2\pi r dr$

$= 2\pi\sigma_0 \int_0^r r dr - \frac{2\pi\sigma_0}{R} \int_0^r r^2 dr$

$= 2\pi\sigma_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right]$



For ϕ_0, r = R, $q_{enc} = 2\pi\sigma_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right] = 2\pi\sigma_0 R^2 \times \frac{1}{6}$

For ϕ, $r = \frac{R}{4}$, $q'_{enc} = 2\pi\sigma_0 \left[\frac{\left(\frac{R}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{R}{4}\right)^3}{3R}\right]$

$= 2\pi\sigma_0 \left[\frac{R^2}{2\times 16} - \frac{R^2}{64\times 3}\right]$

$= 2\pi\sigma_0 R^2 \left[\frac{6-1}{192}\right]$

$= 2\pi\sigma_0 R^2 \times \frac{5}{192}$

$\therefore \frac{\phi_0}{\phi} = \frac{192}{6\times 5} = 6.4$

Ans. 6.4

JEE ADVANCED
27 September 2020
Chemistry Paper - 1

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full marks : +3 If ONLY the correct option is chosen;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : −1 In all other cases.

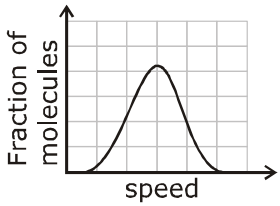
भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

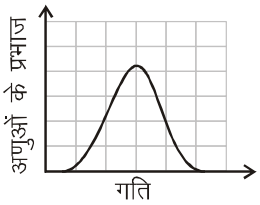
पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक : −1 अन्य सभी स्थितियों में।

---

1. If the distribution of molecular speeds of a gas is as per the figure shown below, then the ratio of the most probable, the average, and the root mean square speeds, respectively, is



यदि एक गैस का आण्विक गति का वितरण निम्नांकित चित्रानुसार है, तो अधिकतम प्रायिक वेग, औसत वेग तथा वर्ग माध्य मूल मान का अनुपात, क्रमशः है:



(A) 1 : 1 : 1
(B) 1 : 1 : 1.224
(C) 1 : 1.128 : 1.224
(D) 1 : 1.128 : 1

Ans. **B**

By observing the graph we get

$u_{mps} : u_{avg} : u_{rms} = 1 : 1 : 1.224$

2. Which of the following liberates O_2 upon hydrolysis?
निम्न में से कौन जलअपघटन होने पर O_2 मुक्त करता है?
(A) Pb_3O_4 (B) KO_2 (C) Na_2O_2 (D) Li_2O_2

Ans. **B**
Superoxides liberate oxygen with water

$$2KO_2 + H_2O \longrightarrow 2KOH + H_2O_2 + O_2$$

3. A colorless aqueous solution contains nitrates of two metals, X and Y. When it was added to an aqueous solution of NaCl, a white precipitate was formed. This precipitate was found to be partly soluble in hot water to give a residue P and a solution Q. The residue P was soluble in aq. NH_3 and also in excess sodium thiosulfate. The hot solution Q gave a yellow precipitate with KI. The metals X and Y, respectively, are
(A) Ag and Pb (B) Ag and Cd (C) Cd and Pb (D) Cd and Zn
एक रंगहीन जलीय विलयन में दो धातुओं, X तथा Y के नाईट्रेट होते है। जब इसे NaCl के एक जलीय वियलन में मिलाया जाता है, तो एक श्वेत अवक्षेप बनता है। यह अवक्षेप एक अवशेष P तथा एक विलयन Q देने के लिए गर्म जल में आंशिक रूप से विलेय पाया गया है। अवशेष P जलीय NH_3 तथा सोडियम थायोसल्फेट के आधिक्य में भी घुलनशील है। KI के साथ गर्म विलयन Q एक पीला अवक्षेप देता है। X तथा Y धातुऐं, क्रमशः है–
(A) Ag तथा Pb (B) Ag तथा Cd (C) Cd तथा Pb (D) Cd तथा Zn

Ans. **A**

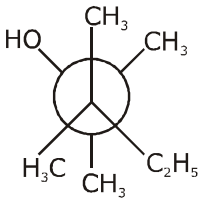
(1) $AgNO_3 + Pb(NO_3)_2 \xrightarrow{NaCl} AgCl + PbCl_2$
solution — white ppt — white ppt partially soluble in hot water

(2) $AgCl + NH_3 \longrightarrow [Ag(NH_3)_2]\,Cl$
(residue-p) — (soluble complex)

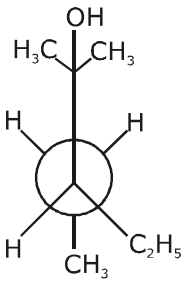
(3) $AgCl + 2Na_2S_2O_3 \longrightarrow Na_3[Ag(S_2O_3)]$
(residue-p) (excess) (soluble complex)

(4) $PbCl_2 + 2KI \longrightarrow PbI_2$
(hot solution-Q) — (yellow ppt)

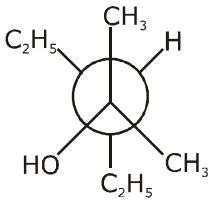
4. Newman projections P, Q, R and S are shown below :



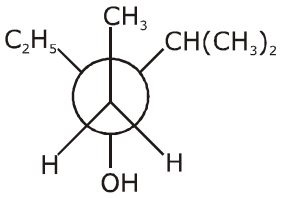
P



Q



R

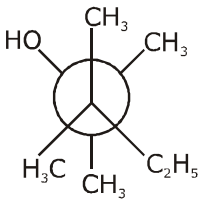


S

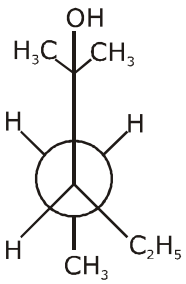
Which one of the following options represents identical molecules ?

(A) P and Q (B) Q and S (C) Q and R (D) R and S

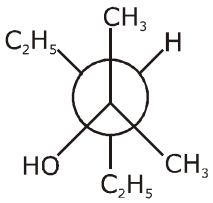
न्यूमैन प्रक्षेपण P, Q, R तथा S को निम्नानुसार दर्शाया गया है–



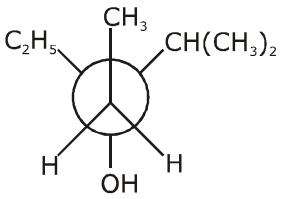
P



Q



R



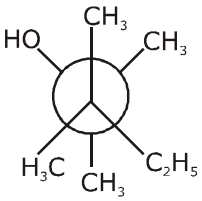
S

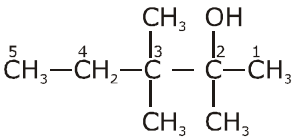
निम्न में से कौनसा एक विकल्प समान अणु प्रदर्शित करता है?

(A) P तथा Q (B) Q तथा S (C) Q तथा R (D) R तथा S

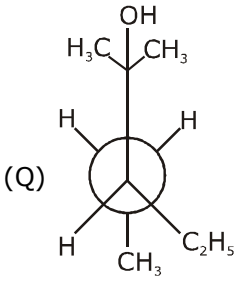
Ans. C

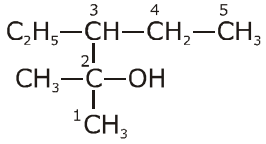
(P)



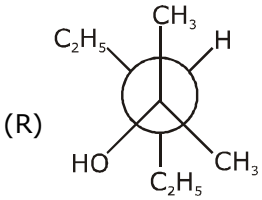


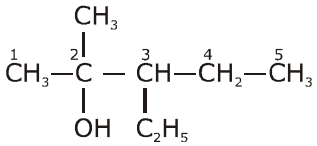
2,3,3-trimethyl Pentan-2-ol

(Q) 

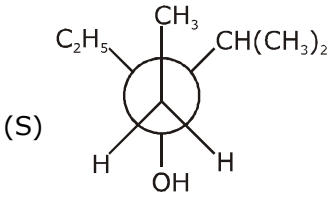


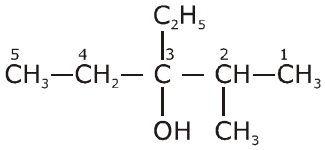
3-Ethyl-2-methyl Pentan-2-ol

(R) 



3-Ethyl-2-methyl Pentan-2-ol

(S) 

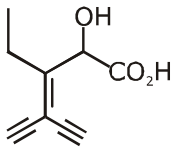


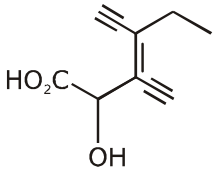
3-Ethyl-2-methyl Pentan-3-ol

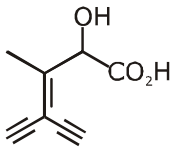
5. Which one of the following structures has the IPUAC name 3-ethynyl-2-hydroxy-4-methylhex-3-en-5-ynoic acid ?

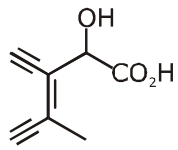
निम्न में से IPUAC नाम

3- एथिनील -2-हाइड्रॉक्सी -4- मेथिलहैक्स-3-ईन-5-आइनॉइक अम्ल वाली संरचना कौनसी है?

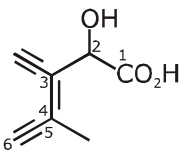
(A) 

(B) 

(C) 

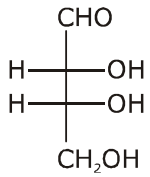
(D) 

Ans. D



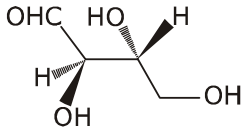
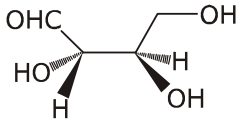
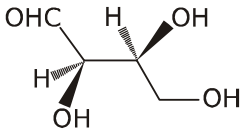
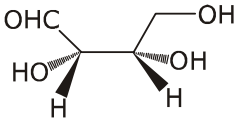
3-ethynyl-2-hydroxy-4-methylhex-3-en-5-ynoic acid

6. The Fischer projection of D-erythrose is shown below :

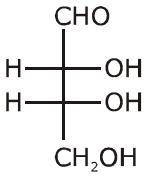


D-Erythrose

D-Erythrose and its isomers are listed as P, Q, R, and S in Column-I. Choose the correct relationship of P, Q, R, and S with D-erythrose from Column II.

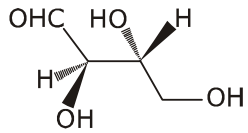
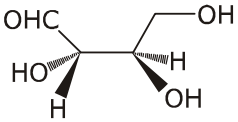
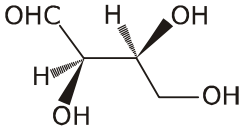
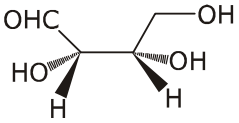
Column – I	**Column – II**
P. 	1. Diastereomer
Q. 	2. Identical
R. 	3. Enantiomer
S. 	

D-इरीथ्रो का फिशर प्रक्षेपण नीचे दर्शाया गया है।



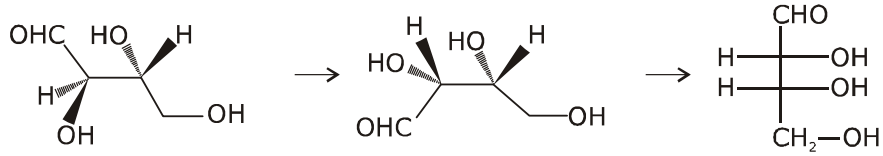
D-इरीथ्रो

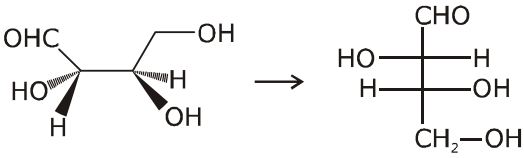
स्तम्भ -I में D- इरीथ्रो तथा इसके समावयवी P, Q, R तथा S के रूप में अंकित है। स्तम्भ II से D- इरीथ्रो वाले P, Q, R तथा S के सही सम्बन्ध का चयन कीजिये।

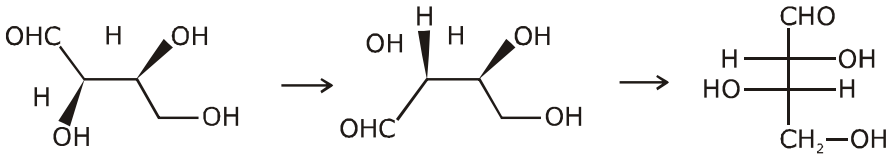
स्तम्भ – I	**स्तम्भ – II**
P. 	1. डाईस्टीरियोमर
Q. 	2. समरूप
R. 	3. प्रतिबिम्बरूपी (इनेन्शियोमर)
S. 	

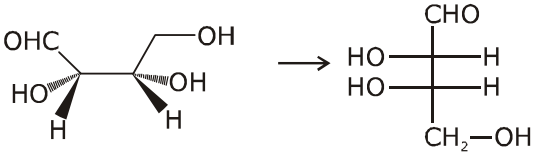
(A) P → 2, Q→ 3, R→ 2, S→ 2 (B) P → 3, Q→ 1, R→ 1, S→ 2
(C) P → 2, Q→ 1, R→ 1, S→ 3 (D) P → 2, Q→ 3, R→ 3, S→ 1

Ans. C

P. 

Q. 

R. 

S. 

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four options(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks	: +4	If only (all) the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2 अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. In thermodynamics, the P–V work done is given by $w = -\int dV\, P_{ext}$.

For a system undergoing a particular process, the work done is, $w = -\int dV\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)$

This equation is applicable to a
(A) system that satisfies the van der Waals equation of state.
(B) process that is reversible and isothermal.
(C) process that is reversible and adiabatic.
(D) process that is irreversible and at constant pressure.

ऊष्मागतिकी में, किया गया कार्य P–V निम्न द्वारा दिया गया है $w = -\int dV\, P_{ext}$

एक विशेष प्रक्रिया से गुजरने वाले तंत्र के लिए, किया गया कार्य है, $w = -\int dV\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)$

यह समीकरण निम्न में से किसके लिए उपयुक्त है–

(A) एक तंत्र जो अवस्था की वाण्डर वाल्स समीकरण को संतुष्ट करता है।

(B) एक प्रक्रिया जो उत्क्रमणीय तथ समतापीय है।

(C) एक प्रक्रिया जो उत्क्रमणीय तथा रूद्धोष्म है।

(D) एक प्रक्रिया जो अनुत्क्रमणीय तथा स्थिर दाब पर है।

Ans. **A,B,C**

$w = -\int P_{ext.}dV$

$P_{ext.} = \left[\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right] = P_{gas}$

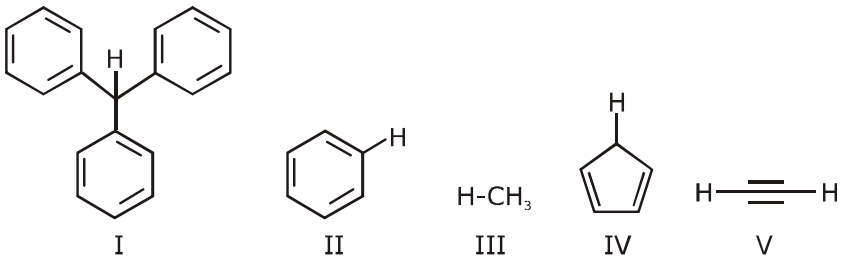
$\Downarrow$

process is reversible

$P_{gas} = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ is Van der waals equation of state.

Hence Ans. A,B,C

8. With respect to the compounds I–V, choose the correct statement(s).



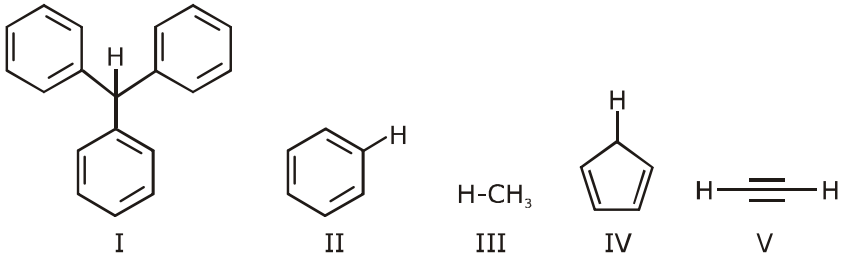
(A) The acidity of compound I is due to delocalization in the conjugate base.

(B) The conjugate base of compound IV is aromatic.

(C) Compound II becomes more acidic, when it has a $-NO_2$ substituent.

(D) The acidity of compounds follows the order I > IV > V > II > III.

यौगिक I–V के साक्षेप, सही कथन का चयन कीजिये–



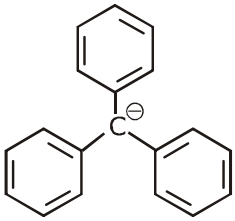
(A) यौगिक I की अम्लीयता संयुग्मी क्षार में विस्थापन के कारण होती है।

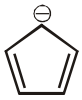
(B) यौगिक IV का संयुग्मी क्षार एरौमेटिक है।

(C) यौगिक II अधिक अम्लीय हो जाता है, जब यह एक $-NO_2$ प्रतिस्थापी रखता है।

(D) यौगिकों की अम्लीयता इस क्रमानुसार है I > IV > V > II > III.

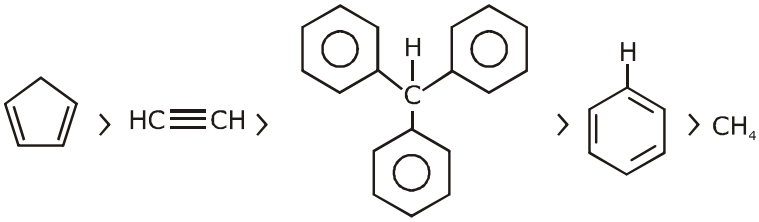
Ans. A,B,C

(A)  is a conjugate base of compound I. Which is stable by delocalisation or resonance.

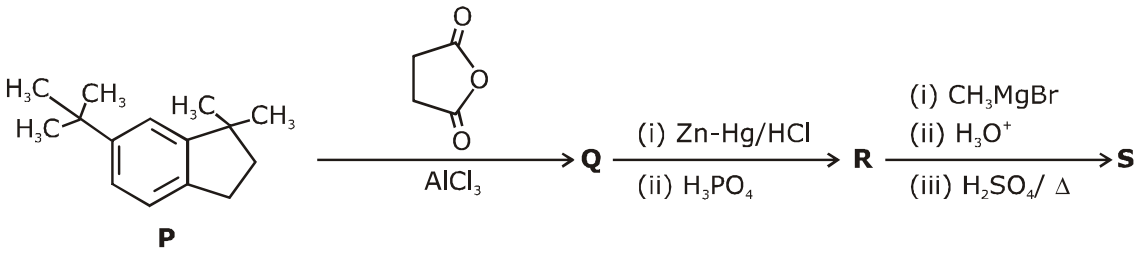
(B)  is a conjugate base of , which is aromatic compound.

(C) $-NO_2$ group is strong electron withdrawing group which increases acidic strength of compound $H-CH_3$.

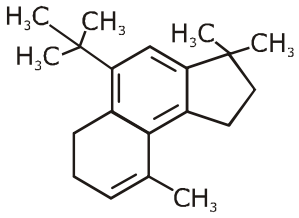
(D) The order of acidic strength

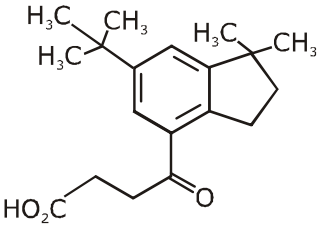


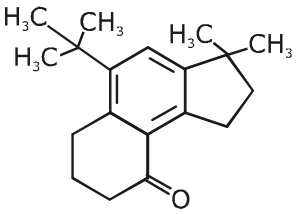
9. In the reaction scheme shown below, Q, R and S are the major products.

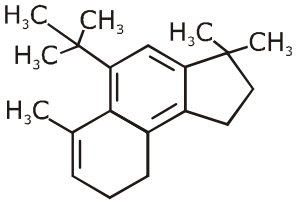


The correct structure of

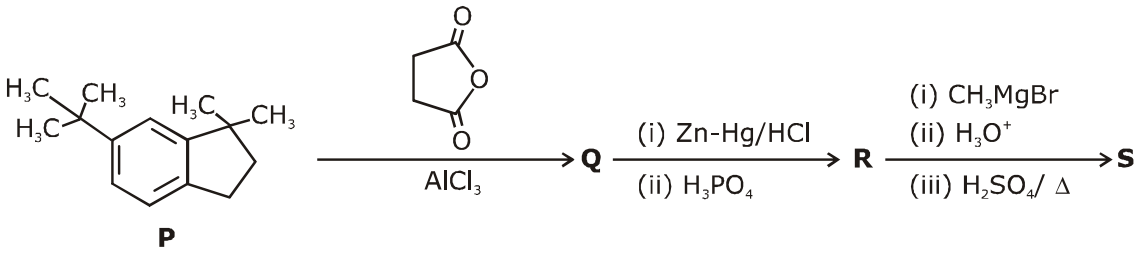
(A) S is 

(B) Q is 

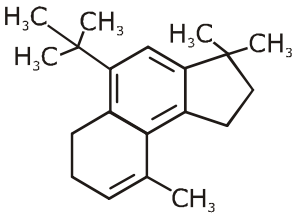
(C) R is 

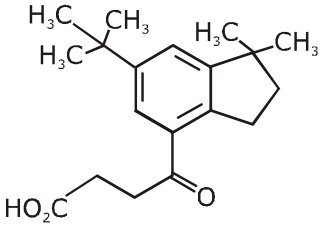
(D) S is 

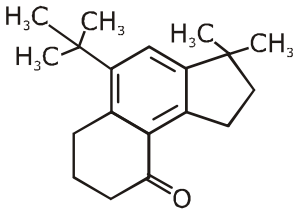
निम्नलिखित अभिक्रिया प्रक्रम में, Q, R तथा S मुख्य उत्पाद हैं।

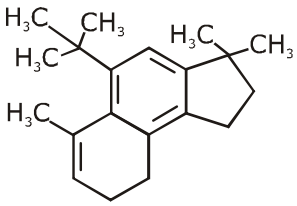


सही संरचना है–

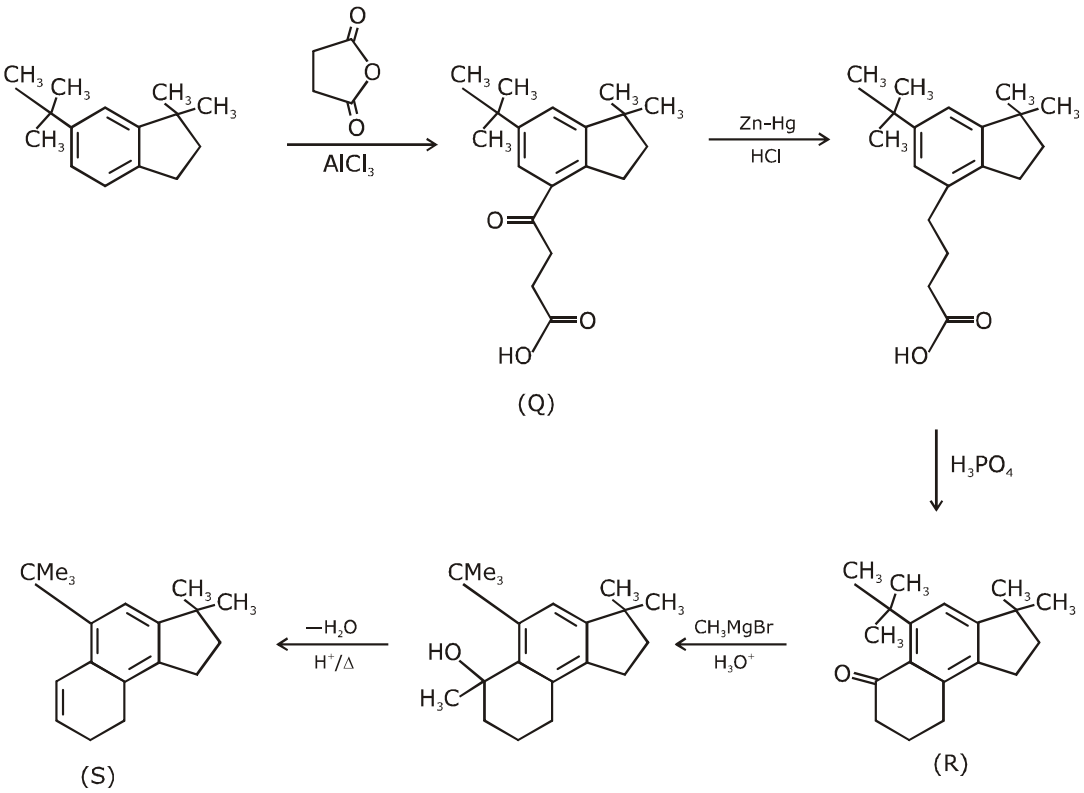
(A) S की है 

(B) Q की है 

(C) R की है 

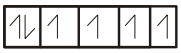
(D) S की है 

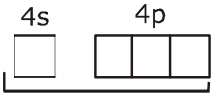
Ans. B,D



10. Choose the correct statement(s) among the following:
(A) $[FeCl_4]^-$ has tetrahedral geometry.
(B) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ has 2 geometrical isomers.
(C) $[FeCl_4]^-$ has higher spin-only magnetic moment than $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$.
(D) The cobalt ion in $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ has sp^3d^2 hybridization.
निम्न में से सही कथन का चयन कीजिये–
(A) $[FeCl_4]^-$ चतुष्फलकीय ज्यामिति रखता है
(B) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ 2 ज्यामितीय समावयवी रखता है
(C) $[FeCl_4]^-$, $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ की अपेक्षा उच्चतम चक्रण–केवल चुम्बकीय आधूर्ण रखता है
(D) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ में कोबाल्ट आयन sp^3d^2 संकरण रखता है।

Ans. **A,C**
(A) $[FeCl_4]^-$ Cl^- is weak field ligand

Fe^{+3} = 

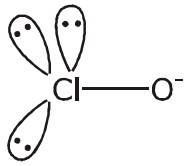


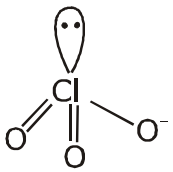
sp^3 - hybridization

n = 4 , $\mu_{(s)} = \sqrt{24}$
(C) $[CO(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$
$CO^{3+} \Rightarrow (3d^6)$, $(\Delta_0 > P)$
$t_{2g}^6 e_g$, n = 0, $\mu = 0$
hybridization $\rightarrow d^2sp^3$

11. With respect to hypochlorite, chlorate and perchlorate ions, choose the correct statement(s).
(A) The hypochlorite ion is the strongest conjugate base.
(B) The molecular shape of only chlorate ion is influenced by the lone pair of electrons of Cl.
(C) The hypochlorite and chlorate ions disproportionate to give rise to identical set of ions.
(D) The hypochlorite ion oxidizes the sulfite ion.
हाइपोक्लोराइट, क्लोरेट तथा परक्लोरेट के सापेक्ष, सही कथन का चयन कीजिये–
(A) हाइपोक्लोराइट आयन प्रबलतम संयुग्मी क्षार है।
(B) केवल क्लोरेट आयन की आण्विक आकति Cl के एकाकी इलेक्ट्रॉन युग्म द्वारा प्रभावित है।
(C) हाइपोक्लोराइट तथा क्लोरेट आयन, आयनों के समान समूहों के निर्माण के लिए विषमानुपातन करते है।
(D) हाइपोक्लोराइट आयन सल्फाइट आयन का ऑक्सीकरण करता है।

Ans. **A,B,D**
Acidic nature $\rightarrow HClO < HClO_3 < HClO_4$
Basic nature $\rightarrow ClO^- > ClO_3^- > ClO_4^-$

(B) 



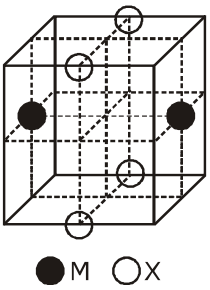
sp^3 (Linear) Sp^3 (pyramidal)

(C) $3\overset{(+1)}{OCl^-} \xrightarrow{\text{hot}} 2\overset{(-1)}{Cl^-} + \overset{(+5)}{ClO_3^-}$

$4\overset{(+5)}{ClO_3^-} \xrightarrow[\text{Lower temp.}]{\text{absence of catalyst}} 3\overset{+7}{ClO_4^-} + \overset{(-1)}{Cl^-}$

(D) $ClO^- + SO_3^- \longrightarrow Cl^- + SO_4^{2-}$

12. The cubic unit cell structure of a compound containing cation M and anion X is shown below. When compared to the anion, the cation has smaller ionic radius. Choose the correct statement(s).
निम्नानुसार एक यौगिक की घनीय इकाई कोष्ठिका धनायन M तथा ऋणायन X युक्त है। ऋणायन की तुलना में धनायन छोटी आयनिक त्रिज्या रखता है।
सही कथन का चयन कीजिये।



(A) The empirical formula of the compound is MX.
(B) The cation M and anion X have different coordination geometries.
(C) The ratio of M-X bond length to the cubic unit cell edge length is 0.866.
(D) The ratio of the ionic radii of cation M to anion X is 0.414.
(A) यौगिक का मूलानुपाती सूत्र MX है।
(B) धनायन M तथा ऋणायन X भिन्न उपसहसंयोजक ज्यामितियां रखते है।
(C) M-X बन्ध लम्बाई तथा घनीय इकाई कोष्ठिका कोर लम्बाई का अनुपात 0.866 है।
(D) धनायन M तथा ऋणायन X की आयनिक त्रिज्या का अनुपात 0.414 है।

Ans. **A,C**

According to given diagram, structure seems to be B.C.C.

(1) empirical formula $\rightarrow$ MX

(2) C. No. of 'M' ion = 8 [same co-ordination Geometry]
C. No. of 'X' ion = 8 [same co-ordination Geometry]

(3) M–X Bond Length = $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$

M–X Bond Length = $a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$

$\frac{M-X\,bond\,length}{a(edge\,length)} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

(4) As it is B.C.C.

$$r_{X^-} + r_{M^+} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

$$0.732 \leq \frac{r_{M^+}}{r_{X^-}} < 1$$

Ans. A,C

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, truncate/round -off the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme :</u>

Full marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;
Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।
शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

13. 5.00 mL of 0.10 M oxalic acid solution taken in a conical flask is titrated against NaOH from a burette using phenolphthalein indicator. The volume of NaOH required for the appearance of permanent faint pink color is tabulated below for five experiments. What is the concentration, in molarity, of the NaOH solution?

Exp. No.	Vol. of NaOH (mL)
1	12.5
2	10.5
3	9.0
4	9.0
5	9.0

0.10 M ऑक्सेलिक अम्ल विलयन का 5.00 mL एक शंक्वाकार (conical) फ्लास्क में लेकर फिनॉलफ्थैलीन सूचक का उपयोग करते हुए एक ब्यूरेट द्वारा NaOH के विरूद्ध अनुमापित किया जाता है। स्थायी गुलाबी रगं की उपस्थिति के लिए आवश्यक NaOH का आयतन पॉच प्रयोगों के लिए नीचे सारणीबद्ध है। NaOH विलयन की सान्द्रता, मोलरता में क्या है ?

प्रयोग संख्या	**NaOH का आयतन (mL)**
1	12.5
2	10.5
3	9.0
4	9.0
5	9.0

Ans. 0.11

$H_2C_2O_4 + 2NaOH \longrightarrow Na_2C_2O_4 + 2H_2O$

5ml M

0.1 M

$$M = [NaOH] = \frac{[H_2C_2O_4] \times \text{vol.} \times 2}{\text{vol. of NaOH}}$$

$$[NaOH]_1 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{12.5} = \frac{1}{12.5}$$

$$[NaOH]_2 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{10.5} = \frac{1}{10.5}$$

$$[NaOH]_3 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{9} = \frac{1}{9} = [NaOH]_4 = [NaOH]_5$$

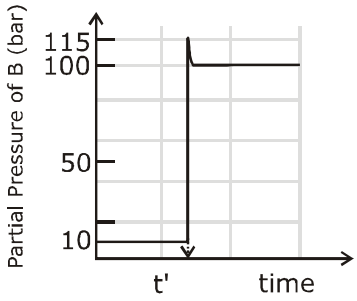
$$[NaOH] \text{ Final Result} = \frac{\frac{1}{12.5} + \frac{1}{10.5} + \frac{1}{9} \times 3}{5}$$

$$= \frac{\left[\frac{2}{25} + \frac{2}{21} + \frac{1}{3}\right]}{5}$$

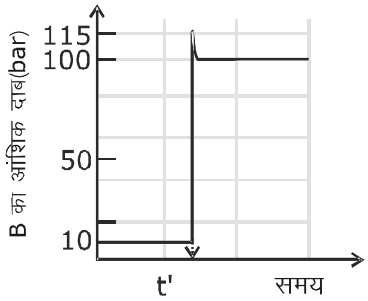
$$= \frac{0.08 + 0.095 + 0.333}{5}$$

$= 0.102 \simeq 0.11$ Ans.

14. Consider the reaction A $\rightleftharpoons$ B at 1000 K. At time 't'. the temperature of the system was increased to 2000 K and the system was allowed to reach equilibrium. Throughout this experiment the partial pressure of A was maintained at 1 bar. Given below is the plot of the partial pressure of B with time. What is the ratio of the standard Gibbs energy of the reaction at 1000 K to that at 2000 K?



1000 K पर अभिक्रिया A $\rightleftharpoons$ B पर विचार कीजिये। समय 't' पर, तंत्र का तापमान 2000 K तक बढ़ जाता है तथा तंत्र को साम्य तक पहुँचने दिया जाता है इस प्रयोग के दौरान A का आंशिक दाब 1 बार बनाए रखा गया था। नीचे समय के साथ B के आंशिक दाब का वक्र दिया गया है। 1000 K तथा 2000 K पर अभिक्रिया की मानक गिब्स ऊर्जा का अनुपात क्या है ?



Ans. **0.25**

$K_{eq.\ 2000\ K} = 100$

$K_{eq.\ 1000\ K} = 10$

$\Delta G_{2000} = -2000\ R \ln (100) = -4000\ R (\ln 10)$

$\Delta G_{1000} = -1000\ R \ln (10) = -1000\ R (\ln 10)$

$$\frac{\Delta G_{2000}}{\Delta G_{1000}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{\Delta G_{1000}}{\Delta G_{2000}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ans. = 0.25

15. Consider a 70% efficient hydrogen-oxygen fuel cell working under standard conditions at 1 bar and 295 K. Its cell reaction is

$$H_2(g) + O_2(g) \rightarrow H_2O(l).$$

The work derived from the cell on the consumption of 1.0×10^{-3} mol of $H_2(g)$ is used to compress 1.00 mol of a monoatomic ideal gas in a thermally insulated container. What is the change in the temperature (in K) of the ideal gas?

The standard reduction potentials for the two half-cells are given below.

$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$, $E^0 = 1.23$ V,

$2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$, $E^0 = 0.00$V.

Use F = 96500 C mol^{-1}, R = 8.314 J mol^{-1} K^{-1}.

1 bar तथा 298 K पर मानक अवस्था में कार्यरत एक 70% दक्ष हाइड्रोजन–ऑक्सीजन ईंधन सेल पर विचार कीजिये। इस सेल की अभिक्रिया है–

$H_2(g) + O_2(g) \rightarrow H_2O(l)$.

1.0×10^{-3} mol $H_2(g)$ के खपत पर सेल द्वारा व्युत्पन्न कार्य को एक ताप रोधित पात्र में 1.00 mol एकलपरमाण्विक आदर्श गैस के संपीडन में उपयोग किया जाता है।

आदर्श गैस के तापमान में परिवर्तन (K में) क्या है ?

$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$, $E^0 = 1.23$ V,

$2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$, $E^0 = 0.00$V.

Use F = 96500 C mol^{-1}, R = 8.314 J mol^{-1} K^{-1}.

Ans. **13.32**

$E^0_{cell} = 1.23$ volt

$\Delta G^0 = \{-2 \times 96500 \times 1.23\}$

Energy used $= \left[2 \times 96500 \times 1.23 \times 70\% \times 10^{-3}\right]$

$= 1 \times \frac{3}{2} \times 8.314 \times (\Delta T)$

$\Delta T = \frac{4 \times 96500 \times 1.23 \times 70 \times 10^{-3}}{100 \times 3 \times 8.314}$

$= 13.32$

16. Aluminium reacts with sulfuric acid to form aluminium sulfate and hydrogen. What is the volume of hydrogen gas in liters (L) produced at 300 K and 1.0 atm pressure, when 5.4 g of aluminium and 50.0 mL of 5.0 M sulfuric acid are combined for the reaction?

(Use molar mass of aluminium as 27.0 g mol^{-1}, R = 0.082 atm L mol^{-1} K^{-1})

एल्यूमिनियम, सल्फयूरिक अम्ल के साथ क्रिया करके एल्यूमिनियम सल्फेट तथा हाइड्रोजन का निर्माण करता है 300 K तथा 1.0 atm दाब पर उत्पन्न हाइड्रोजन गैस का आयतन लीटर में (L) क्या है, जब 5.4 g एल्यूमिनियम तथा 5.0 M सल्फ्यूरिक अम्ल का 50.0 mL अभिक्रिया के लिए संयोजित होते है ?

(एल्यूमिनियम का मोलर द्रव्यमान 27.0 g mol^{-1} उपयोग कीजिये R = 0.082 atm L mol^{-1} K^{-1})

Ans. **6.15 Liter**

$2Al + 3H_2SO_4 \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3H_2$

0.2 mol $\quad \frac{50 \times 5}{1000} = 0.25$mol

(L.R.)

Volume = $\frac{1}{4} \times 0.082 \times 300$

$= \frac{24.6}{4}$

= 6.15 Litre.

17. $^{238}_{92}U$ is known to undergo radioactive decay to form $^{206}_{82}Pb$ by emitting alpha and beta particles. A rock initially contained 68 x 10^{-6} g of $^{238}_{92}U$. If the number of alpha particles that it would emit during its radioactive decay of $^{238}_{92}U$ to $^{206}_{82}Pb$ in three half-lives is Z × 10^{18}. then what is the value of Z?

अल्फा तथा बीटा कणों के उत्सर्जन द्वारा $^{206}_{82}Pb$ के निर्माण के लिए $^{238}_{92}U$ रेडियोधर्मी क्षय से गुजरता है। एक चट्टान (rock) प्रारम्भिक रूप से 68 x 10^{-6} g $^{238}_{92}U$ युक्त होती है। तीन अर्द्ध–आयुफालों में $^{238}_{92}U$ से $^{206}_{82}Pb$ के रेडियोधर्मी क्षय दौरान उत्सर्जित अल्फा कणों की संख्या Z × 10^{18} है, जब Z का मान क्या है ?

Ans. **1.21**

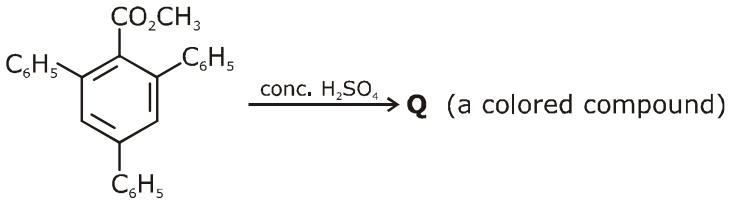
$_{92}U^{238} \longrightarrow {}_{82}Pb^{206} + 8_2He^4 + 6_{-1}\beta^0$ (antineutrino)

$\left[\frac{68 \times 10^{-6}}{238}\right] \times \frac{7}{8} \times 8 \times 6.023 \times 10^{23}$

$= \frac{68 \times 7 \times 6.023 \times 10^{+17}}{238}$

= 1.2046 × 10^{18} = 1.21

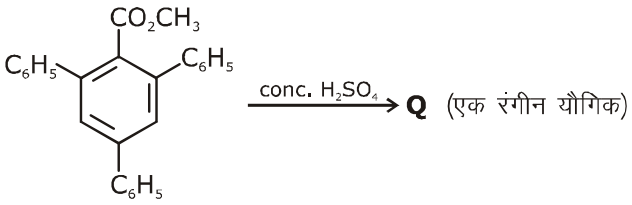
18. In the following reaction, compound Q is obtained from compound P via an ionic intermediate.



P

What is the degree of unsaturation of Q ?

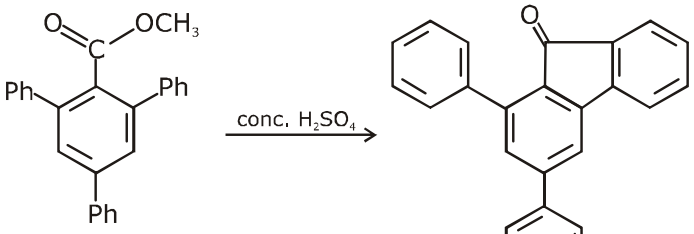
निम्न अभिक्रिया में, एक आयनिक माध्यम से यौगिक P द्वारा यौगिक Q प्राप्त किया गया है।



P

Q की असंतप्तता की मात्रा क्या है ?

Ans. 18



(Q)

Total degree of unsaturation = 18

JEE ADVANCED
27 September 2020
Mathematics Paper - 1

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks : +3 If ONLY the correct option is chosen;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : –1 In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

---

1. Suppose a,b denote the distinct real roots of the quadratic polynomial $x^2 + 20x - 2020$ and suppose c,d denote the distinct complex roots of the quadratic polynomial $x^2 - 20x + 2020$. Then the value of $ac(a-c) + ad(a-d) + bc(b-c) + bd(b-d)$ is

(A) 0 (B) 8000 (C) 8080 (D) 16000

1. माना a,b द्विघात बहुपद $x^2 + 20x - 2020$ के भिन्न–भिन्न वास्तविक मूल को दर्शाते है तथा माना c,d द्विघात बहुपद $x^2 - 20x + 2020$ के भिन्न–भिन्न सम्मिश्र मूल को दर्शाते है। तब $ac(a-c) + ad(a-d) + bc(b-c) + bd(b-d)$ का मान है –

(A) 0 (B) 8000 (C) 8080 (D) 16000

Ans. D

$x^2 + 20x - 2020 = 0$ → a, b

$a + b = -20$ & $a.b = -2020$

& $x^2 - 20x + 2020 = 0$ → c, d

$c + d = 20$ & $c.d = 2020$

Now

$= ac(a-c) + ad(a-d) + bc(b-c) + bd(b-d)$
$= a^2(c+d) + b^2(c+d) - c^2(a+b) - d^2(a+b)$
$= (a^2 + b^2)(c+d) - (a+b)(c^2 + d^2)$
$= ((a+b)^2 - 2ab)((c+d) - (a+b)((c+d)^2 - 2cd)$

$= ((400 + 4040)(20) - (-20)((20)^2 - 4040)$
$= 20[4440 - 3640]$
$20[800] = 16000$

2. If the function $f:R \to R$ is defined by $f(x) = |x|\,(x-\sin x)$, then which of the following statements is TRUE ?

(A) f is one-one, but NOT onto
(B) f is onto, but NOT one-one
(C) f is BOTH one-one and onto
(D) f is NEITHER one-one NOR onto

2. यदि फलन $f:R \to R$, $f(x) = |x|\,(x-\sin x)$, के द्वारा परिभाषित है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) f एकेकी है लेकिन आच्छादक नही है।
(B) f आच्छादक है लेकिन एकेकी नही है।
(C) f एकेकी तथा आच्छादक दोनो है।
(D) f ना तो एकेकी ना आच्छादक है।

Ans. C

$f(x) = |x|(x - \sin x)$
$f(-x) = -(|x|(x - \sin x))$
$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ is odd
$\Rightarrow R_f = R = c.d_f$ = onto
Now

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x - \sin x - x\cos x & x \geq 0 \\ -2x + \sin x + x\cos x & x < 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall \ x \in R$
$\Rightarrow$ f is one - one

3. Let the functions $f:R \to R$ and $g:R \to R$ be defined by

$f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$ and $g(x) = \frac{1}{2}(e^{x-1} + e^{1-x})$.

Then the area of the region in the first quadrant bounded by the curves $y = f(x)$, $y = g(x)$ and $x = 0$ is.

(A) $(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e - e^{-1})$
(B) $(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e - e^{-1})$
(C) $(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e + e^{-1})$
(D) $(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e + e^{-1})$

3. माना फलन $f:R \to R$ तथा $g:R \to R, f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$ तथा $g(x) = \frac{1}{2}(e^{x-1}+e^{1-x})$ के द्वारा परिभाषित है। तब वक्रो $y = f(x)$, $y = g(x)$ तथा $x = 0$ द्वारा परिबद्ध प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा –

(A) $(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e - e^{-1})$ (B) $(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e - e^{-1})$

(C) $(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e + e^{-1})$ (D) $(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e + e^{-1})$

Ans. **A**

$f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - e^{-(x-1)} & x \geq 1 \\ e^{x-1} - e^{(x-1)} = 0 & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

$$\& \; g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right)$$

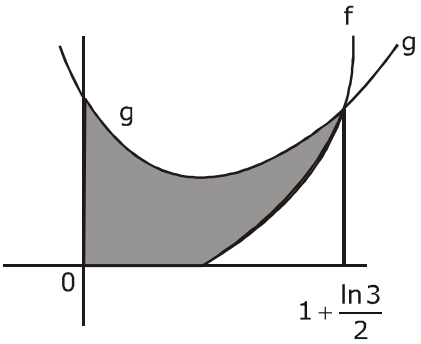
Now $f(x) = g(x)$

$$e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right)$$

$$2e^{x-1} - \frac{2}{e^{x-1}} = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}$$

$$e^{x-1} - \frac{3}{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow e^{x-1} = \sqrt{3}$$

$$x = 1 + \frac{\ln 3}{2}$$



$$\text{Area} = \int_0^1 \left(g(x) - 0\right) + \int_1^{1+\frac{\ln 3}{2}} \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right) + \int_1^{1+\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right) - \left(e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}}\right) dx$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2} + 2 - \sqrt{3}$$

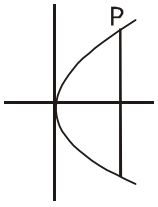
4. Let a, b and λ be positive real numbers. Suppose P is an end point of the latus rectum of the parabola $y^2 = 4\lambda x$, and suppose the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passes through the point P. If the tangents to the parabola and the ellipse at the point P are perpendicular to each other, then the eccentricity of the ellipse is.

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

4. माना a, b तथा λ धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना P परवलय $y^2 = 4\lambda x$ के आभिलम्ब का एक अंत बिंदू है तथा माना दीर्घवत $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ बिन्दू P से गुजरता है। यदि बिन्दू P पर परवलय तथा दीर्घवत्त की स्पर्श रेखाएं एक दूसरे के लम्बवत है, तब दीर्घवत्त की उत्केन्द्रता होगी –

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

Ans. A



P(λ,2λ)

Now E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Passes through P

$$\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{4\lambda^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=\frac{1}{\lambda^2} \qquad ...(1)$$

Now $m_T\big|_p^{p_{ar}} - m_T\big|_p^{E} = 1$

$$\frac{2\lambda}{y}\bigg|_p \times -\frac{x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{y}\bigg|_p = -1$$

$$\frac{2\lambda}{2\lambda}x-\frac{\lambda}{a^2}\cdot\frac{b^2}{2\lambda} = -1$$

$b^2 = 2a^2$

for ecc. of ellipse

$$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

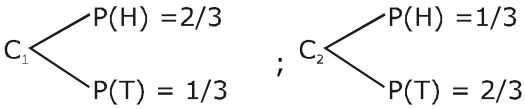
5. Let C_1 and C_2 be two biased coins such that the probabilities of getting head in a single toss are $\frac{2}{3}$ and $\frac{1}{3}$, respectively. Suppose α is the number of heads that appear when C_1 is tossed twice, independently, and suppose β is the number of heads that appear when C_2 is tossed twice, independently. Then the probability that the roots of the quadratic polynomial $x^2-\alpha x+\beta$ are real and equal, is

(A) $\frac{40}{81}$ (B) $\frac{20}{81}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

5. माना C_1 तथा C_2 दो अनिष्पक्ष (Bised) सिक्के इस प्रकार है कि एक अकेली उछाल में चिट प्राप्त करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{1}{3}$ है। माना α चिटो की संख्या है जो उपस्थित होती है जब C_1 स्वतंत्र रूप से दो बार उछाला जाता है तथा माना β चिटो की संख्या है जो उपस्थित होती है। जब C_2 स्वतंत्र रूप से दो बार उछाला जाता है। तब द्विघात बहुपद $x^2-\alpha x+\beta$ के मूल वास्तविक तथा समान है की प्रायिकता है।

(A) $\frac{40}{81}$ (B) $\frac{20}{81}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

Ans. **B**



Now roots of $x^2-\alpha x+\beta=0$ are real & equal

$\therefore D=0$

$\alpha^2 - 4\beta = 0$

$\alpha^2 = 4\beta$

$\Rightarrow (\alpha,\beta) = (0,0),(2,1)$

$$P(E) = {}^2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2 .{}^2C_0\left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}^2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2 .{}^2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{81}$$

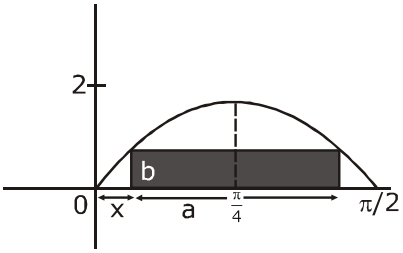
6. Consider all rectangles lying in the region $\left\{(x,y) \in R \times R : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ and } 0 \le y \le 2\sin(2x)\right\}$ and having one side on the x-axis. The area of the rectangle which has the maximum perimeter among all such rectangles, is

(A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

6. माना सभी आयत क्षेत्र $\left\{(x,y) \in R \times R : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ and } 0 \le y \le 2\sin(2x)\right\}$ में स्थित है तथा x-अक्ष पर एक भुजा रखते है। आयत का क्षेत्रफल जो ऐसे सभी आयतो के बीच में अधिकतम परिमाप रखता है, होगा।

(A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

Ans. C



Let sides of rectangle are a & b

then perimeter = 2a + 2b

p = 2(a + b)

Now b = 2sin2x & b = 2sin(2x + 2a) $\Rightarrow$ 2x + 2x + 2a = π

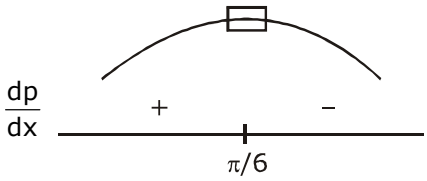
$\left\{x = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right\}$

for perimeter max.

P = 2a + 2b

P = π – 4x + 4sin2x

$$\frac{dp}{dx} = -4 + 8\cos 2x = 8\left\{\cos 2x - \frac{1}{2}\right\}$$



P_{max} at $x = \pi/6$

Now Area $= \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).(2\sin 2x) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four options(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme :</u>

Full marks : +4 If only (all) the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks : +3 If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks : +2 If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks : +1 If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : –2 In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक : +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक : +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक : +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक : –2 अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. Let the function $f:R \to R$ be defined by $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$ and let $g:R \to R$ be an arbitrary function. Let $fg: R \to R$ be the product function defined by $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) If g is continuous at x = 1, then fg is differentiable x = 1

(B) If fg is differentiable at x = 1, then g is continuous at x = 1

(C) If g is differentiable at x = 1, then fg is differentiable at x = 1

(D) If fg is differentiable at x =1, then g is differentiable at x = 1

7. माना फलन $f:R \to R$, $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$ के द्वारा परिभाषित है तथा माना $g:R \to R$ एक स्वेच्छ फलन है। माना $fg: R \to R$ गुणन फलन है जो $(fg)(x) = f(x)g(x)$ के द्वारा परिभाषित है। तब निम्न में से कौनसा फलन सत्य है।

(A) यदि g, x = 1 पर संतत है, तब fg, x = 1 पर अवकलनीय है।

(B) यदि fg, x = 1 पर अवकलनीय है, तब g, x = 1 पर संतत है।

(C) यदि g, x = 1 पर अवकलनीय है, तब fg, x = 1 पर अवकलनीय है।

(D) यदि fg, x =1 पर अवकलनीय है, तब g, x = 1 पर अवकलनीय है।

Ans. **A,C**

$f : R \to R$

(A) $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$; $g : R \to R$

$h(x) = f(x).\ g(x) = (x^3 - x^2 + (x-1)\sin x).\ g(x)$

$$h'(1^+) = \lim_{h\to 0} \frac{\left\{(1+h)^3 - (1+h)^2 + h.\sin(1+h)\right\} g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1 + h^3 + 3h + 3h^2 - 1 - h^2 - 2h + h\sin(1+h)\right) g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(h^3 + 2h^2 + h + h\sin(1+h)\right) g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1 + \sin(1+h)\right) g(1+h)$$

$$h'(1^-) = \lim_{h\to 0} \frac{\left((1-h)^3 - (1-h)^2 + (-h)\sin(1-h)\right) g(1-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(-h^3 - 3h + 3h^2 - h^2 + 2h - h\sin(1-h)\right) g(1-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1 + \sin(1-h)\right) g(1-h)$$

as g(x) is constant at x =1

$\therefore\ g(1+h) = g(1-h) = g(1)$

$h'(1^+) = h'(1^-) = (1 + \sin 1)\, g(1)$

'A' is Correct.

8. Let M be a 3 × 3 invertible matrix with real entries and let I denote the 3 × 3 identity matrix. If M^{-1} = adj (adj M), then which of the following statements is/are ALWAYS TRUE ?

(A) M = I (B) det M =1 (C) $M^2 = I$ (D) (adj M^2) = I

8. माना M एक 3 × 3 का वास्तविक प्रविष्ठियों के साथ त्युत्क्रमणीय आव्युह है। तथा माना I, 3 × 3 के तत्समक आव्युह को निरूपित करता है। यदि M^{-1} = adj (adj M) है, तब निम्न में से कौनसा कथन हमेशा सत्य होगा –

(A) M = I (B) det M =1 (C) $M^2 = I$ (D) (adj M^2) = I

Ans. B,C,D

M^{-1} = adj(adj(M))

(adj M)M^{-1} = (adjM)(adj(adj(M)))

(adj M)M^{-1} = N. adj(N) { Let adj(M) = N }

(adj M)M^{-1} = |N|I

(adjM)M^{-1} = |adj(M)|I_3

(adjM) = $|M|^2$ .M .....(1)

|adj M| = $||M|^2.M|$

$|M|^2 = |M^6|.|M|$

|M|=1

from equation (1)

adj.M =M (2)

Multiply by matrix M

M.adj M = M^2

$|M|I_3 = M^2$

$M^2 = I$

From (2) adj M =M

$(adj\ M)^2 = M^2 = I$

9. Let S be the set of all complex numbers z satisfying $|z^2+z+1| = 1$. Then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) $\left|z+\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ for all $z \in S$ (B) $|z| \le 2$ for all $z \in S$

(C) $\left|z+\frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ for all $z \in S$ (D) The set S has exactly four elements

9. माना S सभी सम्मिश्र संख्याओं z का समुच्य है जो $|z^2+z+1| = 1$ को सन्तुष्ट करता है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) सभी $z \in S$ के लिए $\left|z+\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ है।

(B) सभी $z \in S$ के लिए $|z| \le 2$ है।

(C) सभी $z \in S$ के लिए $\left|z+\frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ है।

(D) समुच्य S ठीक चार अव्यव रखता है।

Ans. **B,C**

$|z^2+z+1| = 1$

Let $z^2+z+1 = e^{i\theta}$

as $|z^2+z+1| = 1$

$\therefore z^2+z+1-e^{i\theta} = 0$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4+4e^{i\theta}}}{2}$$

$$Z+\frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{i\theta}-3}$$

$$Z+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4\cos\theta-3)+i4\sin\theta}$$

$$\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(4\cos\theta-3)^2+(4\sin\theta)^2}\right\}^{1/2}$$

Let $a = (4\cos\theta-3)+i4\sin\theta$

$$|a| = \sqrt{(4\cos\theta-3)^2+16\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \sqrt{16\cos\theta^2+9-24\cos\theta+16\sin^2\theta}$$

$$|a| = \sqrt{25-24\cos\theta}$$

$$|a| \in [1,7] \therefore \left|z+\frac{1}{2}\right| \in \left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$$

$$Z = \frac{-1\pm\sqrt{(4\cos\theta-3)+i\sqrt{4\sin\theta}}}{2}$$

$$2Z = -1 \pm \sqrt{(4\cos\theta-3)+i(4\sin\theta)}$$

$$|2z| \le 1+\sqrt{(25-24\cos\theta)^{1/2}} \Rightarrow |2z| \le 1+\sqrt{7}$$

$|2z| \le 3.4 \Rightarrow |z| \le 1.7$

10. Let x, y and z be positive real numbers. Suppose x, y and z are the lengths of the sides of a triangle opposite to its angles X, Y and Z, respectively. If $\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{Z}{2}=\frac{2y}{x+y+z}$, then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) 2Y = X + Z (B) Y = X + Z (C) $\tan\frac{x}{2}=\frac{x}{y+z}$ (D) $x^2 + z^2 - y^2 = xz$

10. माना x, y तथा z धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना X, Y तथा Z क्रमशः एक त्रिभुज की भुजाओं लम्बाईयां है जो इसके कोण x,y तथा z के विपरित है। यदि $\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{Z}{2}=\frac{2y}{x+y+z}$ है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) 2Y = X + Z (B) Y = X + Z (C) $\tan\frac{x}{2}=\frac{x}{y+z}$ (D) $x^2 + z^2 - y^2 = xz$

Ans. **B,C**

$$\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{z}{2}=\frac{2y}{x+y+z}$$

$$\frac{\Delta}{s(s-x)}+\frac{\Delta}{s(s-z)}=\frac{2y}{x+y-z}$$

$$\Delta\left\{\frac{2s-x-z}{(s-x)(s-y)}\right\}=y$$

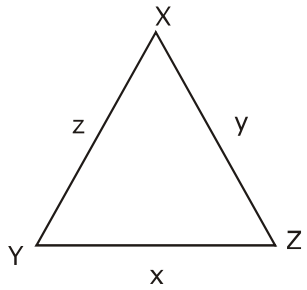
$\Delta = (s - x)(s - z)$

$$1=\frac{\Delta}{s(s-y)} \Rightarrow \tan\frac{y}{2}=1$$

$y = 90°$

(B) $\therefore \angle y = \angle x + \angle z$

(D) False by Cosine formula



$$\text{(C) } \tan\frac{x}{2}=\frac{\Delta}{s(s-x)}=\frac{\frac{1}{2}xz}{\frac{1}{2}(x+y+z)\frac{1}{2}(y+z-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z}$$

11 Let L_1 and L_2 be the following straight lines.

$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$ and $L_2 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$

Suppose the straight line $L : \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$

lies in the plane containing L_1 and L_2, and passes through the point of intersection of L_1 and L_2.

If the line L bisects the acute angle between the lines L_1 and L_2, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $\alpha - \gamma = 3$ (B) $l + m = 2$ (C) $\alpha - \gamma = 1$ (D) $l + m = 0$

11 माना L_1 तथा L_2 निम्न सरल रेखाएं है –

$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$ तथा $L_2 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$

माना सरल रेखा $L : \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$,

L_1 तथा L_2, वाले समतल में स्थित है तथा L_1 तथा L_2. के प्रतिच्छेदी बिन्दू से गुजरती है। यदि रेखा L रेखाओ L_1 तथा L_2, के बीच न्यूनकोण को समद्विभाजित करती है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) $\alpha - \gamma = 3$ (B) $l + m = 2$ (C) $\alpha - \gamma = 1$ (D) $l + m = 0$

Ans. A,B

$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3} = \lambda$

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} = \mu$

$P(\lambda+1, -\lambda, 3\lambda+1)$ $Q(-3\mu+1, -\mu, \mu+1)$

for point of Intersection

$\lambda + 1 = -3\mu + 1$ $\lambda = \mu$

$\lambda = \mu = 0$

Point of Intesection (1,0,1)

$\therefore \frac{x-\alpha}{\ell} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$ passes through (1,0,1)

$\frac{1-\alpha}{\ell} = \frac{-1}{m} = \frac{1-\gamma}{-2}$ ...(1)

dr's of $L_1(1, -1, 3)$ dr's of $L_2(-3, -1, 1)$

$\vec{v}_1$ = di's of $L_1\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$; V_2= di's of $L_2\left(\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$

$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 > 0$

$\therefore$ dr's of $\angle$ bisector of L_1 and L_2

$= \left(\frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{11}}\right)$

or ℓ : m : (–2) = – 2 : – 2 : 4

= 2 : 2 : – 4

ℓ = m = 1

$\therefore 1 - \alpha = -1 = \frac{1-\gamma}{-2}$

$\alpha = 2$ $\quad$ $1 - \gamma = 2$; $\gamma = -1$

12 Which of the following inequalities is/are TRUE?

(A) $\int_0^1 x\cos x\ dx \geq \frac{3}{8}$ $\quad$ (B) $\int_0^1 x\sin x\ dx \geq \frac{3}{10}$

(C) $\int_0^1 x^2\cos x\ dx \geq \frac{1}{2}$ $\quad$ (D) $\int_0^1 x^2\sin x\ dx \geq \frac{2}{9}$

12 निम्न में से कौनसी असमिकाएं सत्य है।

(A) $\int_0^1 x\cos x\ dx \geq \frac{3}{8}$ $\quad$ (B) $\int_0^1 x\sin x\ dx \geq \frac{3}{10}$

(C) $\int_0^1 x^2\cos x\ dx \geq \frac{1}{2}$ $\quad$ (D) $\int_0^1 x^2\sin x\ dx \geq \frac{2}{9}$

Ans. A,B,D

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$\therefore \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$

$x\cos x \geq x - \frac{x^3}{2!}$

$$\int_0^1 x\cos x\,dx \geq \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\cos x\,dx \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{6}$$ (A) Correct

similarly

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots$$

$$\sin x \geq x-\frac{x^3}{3!}$$

$$x\sin x \geq x^2-\frac{x^4}{6}$$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx \geq \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6\cdot 5}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx \geq \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx \geq \frac{1}{3}-\frac{1}{30}$$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx \geq \frac{3}{10}$$ Similarly Check (C) and (D)

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, truncate/round -off the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme :</u>
  Full marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;
  Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।

- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।
  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।
  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

13 Let m be the minimum possible value of $\log_3\left(3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}\right)$, where y_1, y_2, y_3 are real numbers for which $y_1+y_2+y_3=9$. Let M be the maximum possible value of $\left(\log_3 x_1+\log_3 x_2+\log_3 x_3\right)$, where x_1, x_2, x_3 are positive real numbers for which $x_1+x_2+x_3=9$. Then the value of $\log_2\left(m^3\right)+\log_3\left(M^2\right)$ is____

13 माना m, $\log_3\left(3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}\right)$, का न्यूनतम संभावित मान है , जहाँ y_1, y_2, y_3 वास्तविक संख्याएँ है, जिसके लिए $y_1+y_2+y_3=9$. है। माना M, $\left(\log_3 x_1+\log_3 x_2+\log_3 x_3\right)$ का अधिकतम संभावित मान है, जहाँ x_1, x_2, x_3 धनात्मक वास्तविक संख्याएँ है जिसके लिए $x_1+x_2+x_3=9$ है। तब $\log_2\left(m^3\right)+\log_3\left(M^2\right)$ का मान है।

Ans. 8.00

$$\frac{3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}}{3} \geq \left(3^{y_1}.3^{y_2}.3^{y_3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 3.\left(3^{y_1+y_2+y_3}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \therefore y_1+y_2+y_3=9$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 3.\left(3^9\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 81$$

$m = \log_3 81 = 4$

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \left(x_1.x_2.x_3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{9}{3} \geq \left(x_1.x_2.x_3\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 27 \geq x_1x_2x_3$$

$M = \log_3(x_1x_2x_3) = \log_3(27) = 3$

$\log_2(m)^3 + \log_3(M)^2 \Rightarrow \log_2(2^6) + \log_3(3^2) = 6 + 2 = 8$

14 Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be a sequence of positive integers in arithmetic progression with common difference 2. Also, let $b_1, b_2, b_3, \ldots$ be a sequence of positive integers in geometric progression with common ratio 2. If $a_1 = b_1 = c$, then the number of all possible values of c, for which the equality $2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ holds for some positive integer n, is_____

14 माना $a_1, a_2, a_3, \ldots$ सार्वअन्तर 2 के साथ समान्तर श्रेणी में धनात्मक पूर्णांको का एक अनुक्रम है। माना $b_1, b_2, b_3, \ldots$ सार्व अनुपात 2 के साथ गुणोंतर श्रेणी में धनात्मक पूर्णांको का एक अनुक्रम है। यदि $a_1 = b_1 = c$, है, तब c के सभी संभावित मानों की संख्या जिसके लिए असमिका $2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ कुछ धनात्मक पूर्णांक n के लिए है, होगी ।

Ans. 1.00

$2(a_1+a_2+.....+a_n) = b_1 + b_2 + ... + b_n$

$$2\left[\frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)2\right)\right] = b_1\frac{\left(2^n-1\right)}{2-1}$$

$2n[a_1 + (n-1)] = b_1(2^n - 1)$

$2na_1 + 2n^2 - 2n = a_1(2^n - 1)$

$$a_1 = \frac{2\left(n^2-n\right)}{\left(2^n-1-2n\right)} = C_1 \qquad \because\ a_1 = c_1$$

$\because\ C_1 \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{2\left(n^2-n\right)}{2^n-1-2n} \geq 1$$

$2(n^2 - n) \geq 2^n - 1 - 2n$ $\quad \because\ n^2 - n \geq 0$ for $n \geq 1$

$= 2n^2 + 1 \geq 2^n$

There for n =1, 2,3,4,5,6

$n = 1 \Rightarrow c_1 = 0$ (×)

$n = 2 \Rightarrow C_1 < 0$ (×)

$n = 3 \Rightarrow C_1 = 12$ (correct)

$n = 4 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$n = 5 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$n = 6 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$\therefore C_1 = 12$ for n = 3

15 Let $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ be the function defined by

$$f(x) = (3 - \sin(2\pi x))\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

If $\alpha, \beta \in [0,2]$ are such that $\{x \in [0,2] : f(x) \geq 0\} = [\alpha, \beta]$, then the value of $\beta - \alpha$ is_____

15 माना $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ फलन है जो

$f(x)=(3-\sin(2\pi x))\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(3\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$ के द्वारा परिभाषित है।

यदि $\alpha,\beta\in[0,2]$ इस प्रकार है कि $\{x\in[0,2]: f(x)\geq 0\}=[\alpha,\beta]$, है, तब $\beta-\alpha$ का मान होगा –

Ans. **1.00**

Let $\pi x - \pi/4 = \theta$

$f(x) \geq 0$

$(3 - \sin2(\theta + \pi/4))\sin\theta - \sin\left[\frac{3\pi}{4}+3\theta+\frac{\pi}{4}\right] \geq 0$

$\Rightarrow 3\sin\theta - \sin\theta\cos2\theta + \sin3\theta \geq 0$

$\Rightarrow \sin\theta[3 - (1 - 2\sin^2\theta) + 3 - 4\sin^2\theta] \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{\sin\theta\left[5-2\sin^2\theta\right]}_{+ve} \geq 0$

$\therefore \sin\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0,\pi]$

$\therefore \pi x - \pi/4 \in [0,\pi]$ $\quad\because x \in [0,2]$

$\pi x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ $\quad \pi x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

$x \in \left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$ $\quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

$\alpha = 1/4$; $\beta = 5/4$

$\beta - \alpha = 1$

16. In a triangle PQR, let $\vec{a}=\overrightarrow{QR},\vec{b}=\overrightarrow{RP}$ and $\vec{c}=\overrightarrow{PQ}$. If

$|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=4 \quad \text{and} \quad \frac{\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})}{\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$,

then the value of $|\vec{a}\times\vec{b}|^2$ is_____

16 एक त्रिभुज PQR में माना $\vec{a}=\overrightarrow{QR},\vec{b}=\overrightarrow{RP}$ तथा $\vec{c}=\overrightarrow{PQ}$ है। यदि

$|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=4$ तथा $\frac{\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})}{\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$

है, तब $|\vec{a}\times\vec{b}|^2$ का मान होगा –

Ans. **108.00**

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$$\frac{\vec{a}.(\vec{c}-\vec{b})}{\vec{c}.(\vec{a}-\vec{b})} = \left[\frac{(\vec{b}+\vec{c}).(\vec{c}-\vec{b})}{(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})}\right]$$

$$= \frac{c^2-b^2}{a^2-b^2} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

$\Rightarrow \frac{c^2-16}{9-16} = \frac{3}{7} \Rightarrow C^2=13$

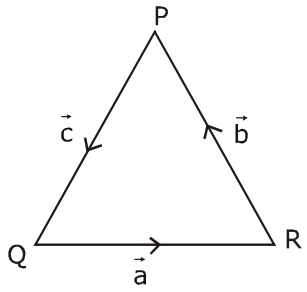
$\vec{a}+\vec{b} = -\vec{c}$

$a^2 + b^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = c^2 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = -6$

$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2 + a^2b^2$

$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (3^2)(4^2) - (\vec{a}.\vec{b})^2$

$= 144 - (36) = 108$



17 For a polynomial $g(x)$ with real coefficients, let m_g denote the number of distinct real roots of $g(x)$. Suppose S is the set of polynomials with real coefficients defined by

$$S = \left\{(x^2-1)^2(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

For a polynomial f, let f' and f'' denote its first and second order derivatives, respectively. Then the minimum possible value of $(m_{f'} + m_{f''})$, where $f \in S$, is_____

17 एक बहुपद $g(x)$ जिसके वास्तविक गुणांक के लिए माना m_g, $g(x)$ के भिन्न–2 वास्तविक मूलो की संख्या को निरूपित करता है। माना S वास्तविक गुणांक के साथ बहुपदो का समुच्य है जो

$$S = \left\{(x^2-1)^2(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

के द्वारा परिभाषित है। एक बहुपद f के लिए, माना f' तथा f'' क्रमशः इसके प्रथम तथा द्वितिय क्रम के अवकलज है, तब $(m_{f'} + m_{f''})$, का न्यूनतम संभावित मान होगा। जहाँ $f \in S$, है–

Ans. **5.00**

$f(x) = (x^2-1)^2h(x)$; $h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

Now, $f(1) = f(-1) = 0$

$\Rightarrow f'(\alpha) = 0, \alpha \in (-1,1)$ [Rolle's Theorem]

Also, $f(1) = f'(-1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ has atleast 3 root $-1, \alpha, 1$ with $-1 < \alpha < 1$

$\Rightarrow f''(x) = 0$ will have at least 2 root, say β, γ such that

$-1 < \beta < \alpha < \gamma < 1$ [Rolle's Theorem]

So, $\min(m_{f''}) = 2$

and we find $(m_{f'} + m_{f''}) = 5$ for $f(x) = (x^2 - 1)^2$

Thus, Ans = 5

18. Let e denote the base of the natural logarithm. The value of the real number a for which the right hand limit $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1-x)^{\frac{1}{x}} - e^{-1}}{x^a}$ is equal to a non-zero real number, is____

18 माना e प्राकत लघुगुणक के आधार को निरूपित करता है। वास्तविक संख्या a का मान जिसके लिए दायी सीमा का मान $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1-x)^{\frac{1}{x}} - e^{-1}}{x^a}$ एक अशून्य वास्तविक संख्या के बराबर है, होगा –

Ans. 1.00

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\ln(1-x)^{1/x}} - e^{-1}}{x^a} \; ; \; L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)} - e^{-1}}{x^a}$$

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\cdots\right)} - e^{-1}}{x^a} \; ; \; L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}.e^{-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\cdots\right)} - e^{-1}}{x^a}$$

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left[e^{-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\cdots\right)} - 1\right]}{x^a} \; ; \; L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left[\left(1 + \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right) + \frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2}{2!}\cdots\right) - 1\right]}{x^a}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\cdots\right) + \frac{x\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)^2}{2!}\cdots\right)}{x^{a-1}}$$

for Non - Zero limit $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

JEE ADVANCED
27 September 2020
Physics Paper - 2

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- Section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **SINGLE DIGIT INTEGER** ranging from 0 to 9. **BOTH INCLUSIVE**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks	: +3	If ONLY the correct integer is entered;
Zero Marks	: 0	If the question is unanswered;
Negative Marks	: –1	In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

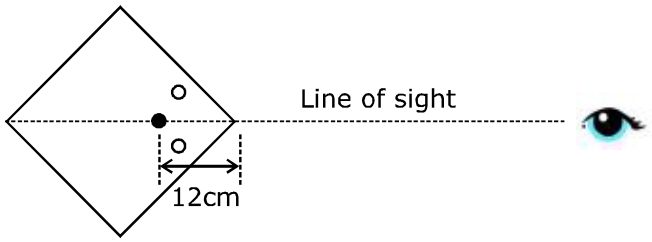
- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, एक एकल अंक पूर्णांक है। दोनों सम्मिलित है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर दर्ज करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर के अनुरूप सही पूर्णांक दर्ज करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +3	केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक	: –1	अन्य सभी स्थितियों में।

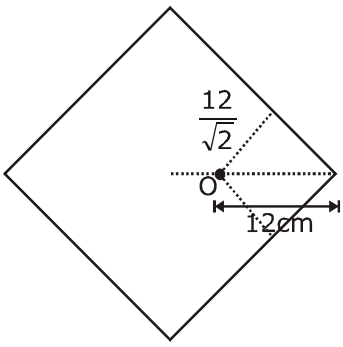
---

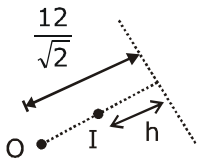
1. A large square container with thin transparent vertical walls and filled with water (refractive index $\frac{4}{3}$) is kept on a horizontal table. A student holds a thin straight wire vertically inside the water 12 cm from one of its corners, as shown schematically in the figure. Looking at the wire from this corner, another student sees two images of the wire, located symmetrically on each side of the line of sight as shown. The separation (in cm) between these images is _____.

पतली पारदर्शी ऊर्ध्वाधर दीवारों के साथ एक बड़ा वर्गाकार पात्र है तथा पानी (अपवर्तनांक $\frac{4}{3}$) से भरा है, जो एक क्षैतिज टेबल पर रखा है। एक विद्यार्थी चित्रानुसार इसके एक कोने से 12 cm पानी के अन्दर ऊर्ध्वाधर रूप से एक पतले सीधे तार को पकड़े (hold) रखता है। इस कोने से तार पर देखते हुए, अन्य विद्यार्थी तार के दो प्रतिबिम्बों को देखता है, जो दिखायेनुसार दृश्य रेखा के प्रत्येक तरफ (side) सममित रूप से स्थित है। इन प्रतिबिम्बों के बीच दूरी (cm में) हैं–



Sol. **(Official Answer Bonus : Marks to all)**
Probable Answer : 3 or 4 or 5
(for 3)
When ray is normally incident

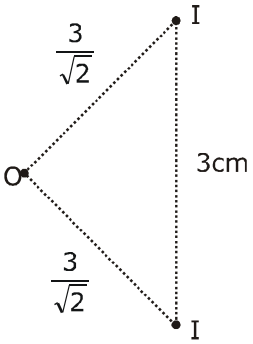




$h \rightarrow$ apparent depth

$$\frac{h}{\frac{12}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{4}{3}}$$

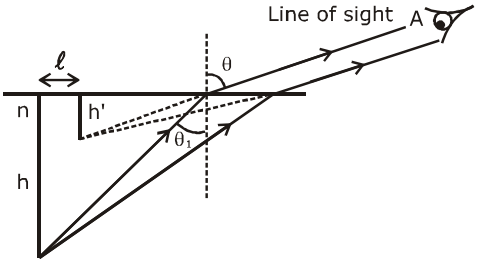
$$h = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

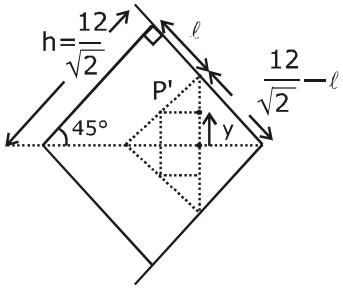


So, distance between images will be 3 cm.

For 4 or 5

We will use formula : $h' = \frac{n^2 h \cos^3\theta}{(n^2 - \text{Sin}^2\theta)^{3/2}}$





$\ell = h\tan\theta_1 - h'\tan\theta$

$\therefore$ For this situation θ = 45°

$\frac{4}{3}.\sin\theta_1 = 1.\sin 45°$

$\sin\theta_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}}$

$\theta_1 \approx 32°$

$\therefore \tan\theta_1 = 0.62$

n = 4/3

$\theta = 45°$

$h = \frac{12}{\sqrt{2}}$

$$\therefore h' = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{12}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{3/2}} = 3.7\text{cm}$$

$\ell = \frac{12}{\sqrt{2}}.0.62 - 3.7 \times 1 = 1.56\text{cm}$

$y = \left(\frac{12}{\sqrt{2}} - \ell\right)\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h'}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Answer = $2y = \left[12 - (\ell + h').\sqrt{2}\right]$

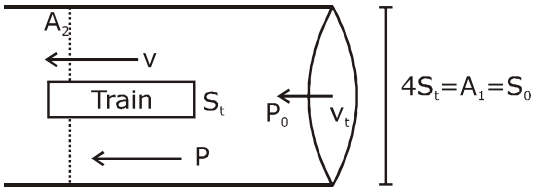
$= 12 - 5.26 \times \sqrt{2} = 4.56$

Answer : 4 or 5

2. A train with cross-sectional area S_t is moving with speed v_t inside a long tunnel of cross-sectional area S_0 ($S_0 = 4S_t$). Assume that almost all the air (density ρ) in front of the train flows back between its sides and the walls of the tunnel. Also, the air flow with respect to the train is steady and laminar. Take the ambient pressure and that inside the train to be p_0. If the pressure in the region between the sides of the train and the tunnel walls is p, then $p_0 - p = \frac{7}{2N}\rho v_t^2$. The value of N is _____.

S_t अनुप्रस्थ–काट क्षेत्रफल की एक ट्रेन, S_0 ($S_0 = 4S_t$) अनुप्रस्थ–काट क्षेत्रफल की एक लम्बी सुरंग के अन्दर v_t चाल से गतिमान है। माना कि ट्रेन के सामने लगभग पूरी हवा (घनत्व ρ) इसके बाजुओ (sides) तथा सुरंग की दीवारों के बीच वापस बहती है। साथ ही, ट्रेन के सापेक्ष हवा का प्रवाह स्थिर तथा पटलीय है। ट्रेन के अन्दर व्यापक (ambient) दाब ρ_0 लेते है। यदि ट्रेन की बाजुओ तथा सुरंग की दीवारों के बीच क्षेत्र में दाब p है, तब $p_0 - p = \frac{7}{2N}\rho v_t^2$ है। तब N का मान है–

Sol. **9**



$A_2 = 3S_t$

Equation of continuity

$v_t 4S_t = 3S_t v$

$v = \frac{4}{3} v_t$

Using Bernoulli's equation

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_t^2 = P + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{4}{3}v_t\right)^2$$

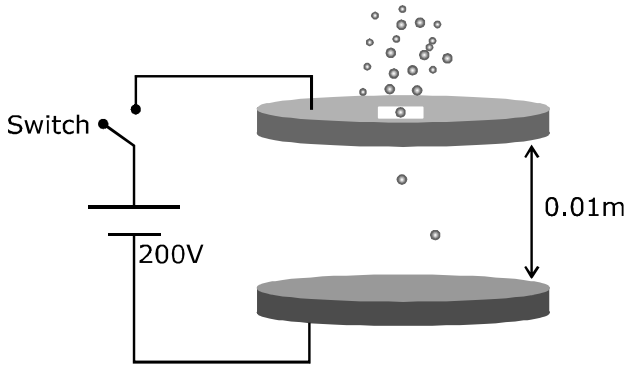
$$P_0 - P = \frac{7}{18}\rho v_t^2$$

Now compare from given value

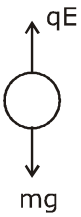
N = 9

3. Two large circular discs separated by a distance of 0.01 m are connected to a battery via a switch as shown in the figure. Charged oil drops of density 900 kg m^{-3} are released through a tiny hole at the center of the top disc. Once some oil drops achieve terminal velocity, the switch is closed to apply a voltage of 200 V across the discs. As a result, an oil drop of radius 8×10^{-7} m stops moving vertically and floats between the discs. The number of electrons present in this oil drop is _____. (neglect the buoyancy force, take acceleration due to gravity =10 ms^{-2} and charge on an electron (e) = 1.6×10^{-19} C)

0.01 m दूरी से पथक् दो बड़ी वत्तीय चकतियाँ चित्रानुसार एक स्विच के माध्यम से एक बैट्री से जोड़ी जाती है। 900 kg m^{-3} घनत्व की आवेशित तेल की बून्दें ऊपरी चकती के केन्द्र पर एक छोटे छिद्र से छोड़ी जाती है। एक बार जब कुछ तेल की बून्दें सीमान्त वेग प्राप्त कर लेती है, तब चकतीयों के सिरों पर 200 V की वोल्टता प्रदान करने के लिए स्विच बन्द किया जाता है। परिणामस्वरूप, 8×10^{-7} m त्रिज्या की एक तेल बून्द ऊर्ध्वाधर गति बन्द करती है तथा चकतीयों के बीच चलायमान (floats) है। इस तेल बून्द में उपस्थित इलेक्ट्रॉनों की संख्या है (उत्पलावन बल नगण्य है, गुरूत्वीय त्वरण =10 ms^{-2} तथा इलेक्ट्रॉन पर आवेश (e) = 1.6×10^{-19} C)



Sol. **6**



$qE = mg$ ....(i)

$q = ne$

$V = Ed \Rightarrow E = \frac{V}{d}$

from equation (i)

$ne\,\frac{V}{d} = mg$

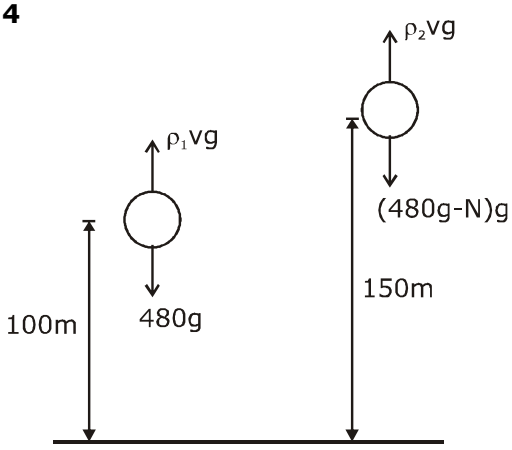
$$n = \frac{mgd}{eV} = 900 \times \frac{4\pi}{3} \times \frac{8\times8\times8\times10^{-21}\times10\times0.01}{1.6\times10^{-19}\times200}$$

$n = 6.02 \approx 6$

4. A hot air balloon is carrying some passengers, and a few sandbags of mass 1 kg each so that its total mass is 480 kg. Its effective volume giving the balloon its buoyancy is V. The balloon is floating at an equilibrium height of 100 m. When N number of sandbags are thrown out, the balloon rises to a new equilibrium height close to 150 m with its volume V remaining unchanged. If the variation of the density of air with height h from the ground is $\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}}$, where $\rho_0 = 1.25$ kg m^{-3} and $h_0 = 6000$ m, the value of N is _____.

एक गर्म हवा का गुब्बारा कुछ यात्रियों तथा प्रत्येक 1 kg द्रव्यमान के कुछ रेत के बेगों को ले जा रहा है, ताकि इसका कुल द्रव्यमान 480 kg है। गुब्बारे को इसका उत्पलावन देने वाला इसका प्रभावी आयतन V है। गुब्बारा 100 m की साम्य ऊँचाई पर चलायमान (floating) है। जब N रेत के बेग बहार फैंके जाते हैं, तब गुब्बारा 150 m के समीप नई साम्य ऊँचाई तक बढ़ता है जहाँ इसका आयतन भी अपरिवर्तित रहता है। यदि धरातल से h ऊँचाई के साथ हवा के घनत्व का परिवर्तन $\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}}$ है, जहाँ $\rho_0 = 1.25$ kg m^{-3} तथा $h_0 = 6000$ m है। तब N का मान है–

Sol. **4**



$\rho_1 vg = 480\ g$

$\rho_2 vg = (480 - N)\ g$

$$\frac{\rho_0 e^{-\frac{100}{6000}} vg}{\rho_0 e^{-\frac{150}{6000}} vg} = \frac{480}{480 - N}$$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{120}} = \frac{480}{480 - N} \Rightarrow 480 - N = \frac{480}{e^{\frac{1}{120}}}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{120}} (480 - N) = 480$

$N = 480 (1 - e^{-\frac{1}{120}})$

$N = 480 (1 - 0.9917)$

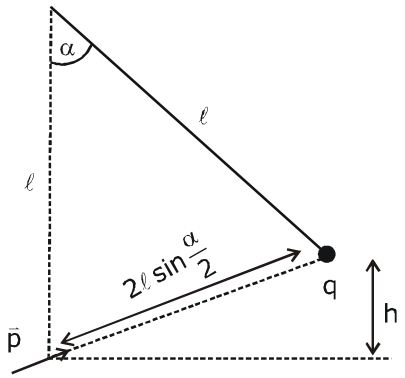
$N = 480 \times 0.008$

$N = 3.98$

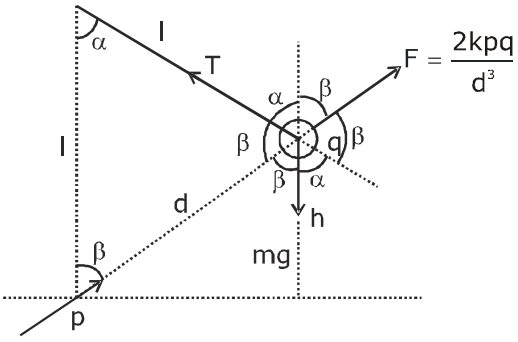
$N \approx 4$

5. A point charge q of mass m is suspended vertically by a string of length ℓ. A point dipole of dipole moment $\vec{p}$ is now brought towards q from infinity so that the charge moves away. The final equilibrium position of the system including the direction of the dipole, the angles and distances is shown in the figure below. If the work done in bringing the dipole to this position is N $\times$(mgh), where g is the acceleration due to gravity, then the value of N is _____ . (Note that for three coplanar forces keeping a point mass in equilibrium, $\frac{F}{\sin\theta}$ is the same for all forces, where F is any one of the forces and θ is the angle between the other two forces)

m द्रव्यमान का एक बिन्दु आवेश q, ℓ लम्बाई की एक रस्सी द्वारा ऊर्ध्वाधर लटकाया जाता है। $\vec{p}$ द्विध्रुव आघूर्ण का एक बिन्दु द्विध्रुव अब अनन्त से q की ओर लाया जाता है ताकि आवेश दूर गति करता है। द्विध्रुव की दिशा, कोण व दूरियाँ को शामिल करते हुए निकाय की अन्तिम साम्यावस्था, नीचे चित्रानुसार है। यदि द्विध्रुव को इस स्थिति तक लाने में किया गया कार्य N $\times$(mgh) है, जहाँ g गुरूत्वीय त्वरण है, तब N का मान है _____ . (ध्यान देते है कि तीन समतलीय बलों के लिए एक बिन्दु द्रव्यमान को साम्यावस्था में रखते हुए, $\frac{F}{\sin\theta}$ सभी बलों के लिए समान है, जहाँ F बलो में से कोई एक है तथा θ अन्य दो बलो के बीच कोण है।)



Sol. 2



$\because\ \alpha + 2\beta = \pi$

$\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$

$W = mgh + \frac{kpq}{d^2}$

$\frac{T}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{mg}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2kpq}{d^3\sin(2\beta)}$

$\frac{Mg}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2kpq}{d^3\sin(\pi-\alpha)}$

$\frac{Mg}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2kpq}{d^3\sin\alpha}$

$\frac{kpq}{d^2} = \frac{Mg\sin\alpha d}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{Mg\sin\alpha 2l\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{kpq}{d^2} = \frac{Mg2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times 2l\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2} = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\because\ \cos\beta = \frac{h}{d}$

$$\cos\beta = \frac{h}{2l\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2l}$$

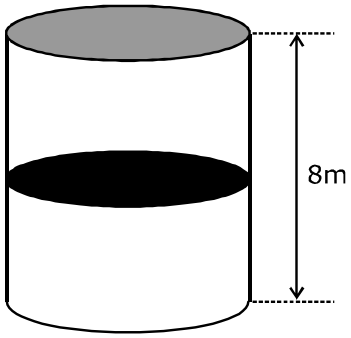
$$\frac{kpq}{d^2} = 2mgl \times \frac{h}{2l} = mgh$$

$$W = mgh + \frac{kpq}{d^2} = mgh + mgh = 2mgh$$

$N = 2$

6. A thermally isolated cylindrical closed vessel of height 8 m is kept vertically. It is divided into two equal parts by a diathermic (perfect thermal conductor) frictionless partition of mass 8.3 kg. Thus the partition is held initially at a distance of 4 m from the top, as shown in the schematic figure below. Each of the two parts of the vessel contains 0.1 mole of an ideal gas at temperature 300 K. The partition is now released and moves without any gas leaking from one part of the vessel to the other. When equilibrium is reached, the distance of the partition from the top (in m) will be _____ (take the acceleration due to gravity =10 ms^{-2} and the universal gas constant =8.3 J $mol^{-1}K^{-1}$).

8 m ऊँचाई का एक उष्मीय रूप से विलगित बेलनाकार बन्द पात्र ऊर्ध्वाधर रखा जाता है। यह 8.3 kg द्रव्यमान के एक उष्मा–पार्य (diathermic) (पूर्णतः उष्मीय चालक) घर्षणरहीत विभाजक द्वारा दो समान भागों में विभाजित किया जाता है। इस प्रकार विभाजक प्रारंभ में चित्रानुसार शिखर से 4 m की दूरी पर रखा जाता है। पात्र के प्रत्येक दो भाग 300 K ताप पर एक आदर्श गैस का 0.1 मोल धारण करते है। विभाजक अब छोड़ा जाता है तथा पात्र के एक भाग से दूसरे तक किसी भी गैस के बिना रिसे गति करता है। जब साम्यावस्था प्राप्त की जाती है, तब शिखर से विभाजक की दूरी (m में) होगी (गुरूत्व के कारण त्वरण =10 ms^{-2} तथा सार्वत्रिक गैस नियतांक =8.3 J $mol^{-1}K^{-1}$ लेते है)



Sol. **Official answer : Bonus (Marks to all)**

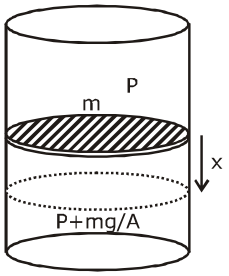
This is because by wrong method we get an integer = 6

<u>Correct Method :</u>

Work done by gravity changes internal energy

$$mgx = nc_v\Delta T \qquad \left(C_v = \frac{3}{2}R\right)$$

$$8.3 \times 10 \times x = 0.2 \times \frac{3}{2} \times 8.3 \times [T_f - 300]$$



$$\Rightarrow T_f = 300 + \frac{100x}{3} \quad ..(1)$$

$$\frac{P(4+x)\times A}{T_f} = \frac{\left(P + \frac{mg}{A}\right).(4-x)A}{T_f} = nR$$

$$\frac{P(4+x)\times A}{T_f} = nR$$

$$PA = \frac{nRT_f}{4+x}$$

$$= \frac{0.1 \times 8.3}{4+x} \times \left(300 + \frac{100}{3}x\right)$$

$$= \frac{83}{3}\left(\frac{9+x}{4+x}\right) \qquad ..(2)$$

$$\frac{\left(P + \frac{mg}{A}\right)(4-x)\,A}{T_f} = nR$$

$$(PA + mg) = \frac{nRT_f}{4-x} \qquad ..(3)$$

$$\left[\frac{83}{3}\left(\frac{9+x}{4+x}\right) + 83\right] = \frac{0.83\left(300 + \frac{100}{3}x\right)}{4-x} \quad \text{..... (From (1) and (2))}$$

$$\left[\frac{83}{3}\left(\frac{9+x}{4+x}\right) + 83\right] = \frac{83}{3}\left[\frac{9+x}{4-x}\right]$$

$$\frac{9+x+12+3x}{4+x} = \frac{(9+x)}{4-x}$$

$(21+4x)(4-x) = (9+x)(4+x)$

$84 - 21x + 16x - 4x^2 = 36 + 9x + 4x + x^2$

$5x^2+18x-48 = 0$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 960}}{10}$$

$$= \frac{-18 \pm \sqrt{1284}}{10}$$

$$= \frac{-18 \pm 35.8}{10}$$

$x \approx 1.8$

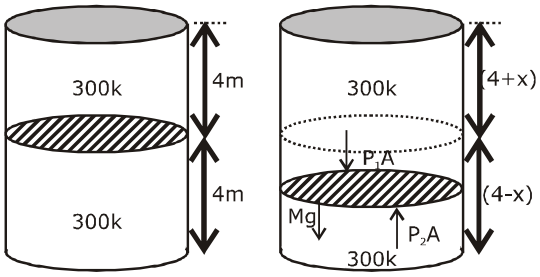
$\therefore y = 4+1.8 = 5.8$

$\simeq 6$

Wrong Method :

As work done by gravity changes internal energy so we can not take temperature constant. But incorrectly by taking temperature constant we get an integer = 6 as answer.

$P_2A = P_1A + mg$ (forces are balanced)



$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{A}$$

$$\frac{nRT}{V_2} = \frac{nRT}{V_1} + \frac{mg}{A}$$

$$nRT\left[\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right] = \frac{mg}{A}$$

$$0.1 \times 8.3 \times 300\left[\frac{1}{A(4-x)} - \frac{1}{A(4+x)}\right] = \frac{mg}{A}$$

$$\frac{0.1 \times 8.3 \times 300}{A}\left[\frac{1}{4-x} - \frac{1}{4+x}\right] = \frac{8.3 \times 10}{A}$$

$$\frac{4+x-4+x}{16-x^2} = \frac{1}{3}$$

$6x = 16-x^2$

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$x = -8, 2$

The distance of the partition from the top = 4+2
= 6m

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- Section contains **SIX (06)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer the each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks	: +4	If only (all the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

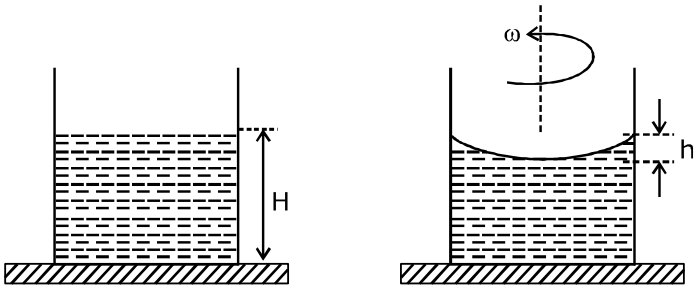
भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2 अन्य सभी स्थितियों में।

7. A beaker of radius r is filled with water (refractive index $\frac{4}{3}$) up to a height H as shown in the figure on the left. The beaker is kept on a horizontal table rotating with angular speed ω. This makes the water surface curved so that the difference in the height of water level at the center and at the circumference of the beaker is h (h<<H,h<<r), as shown in the figure on the right. Take this surface to be approximately spherical with a radius of curvature R. Which of the following is/are correct? (g is the acceleration due to gravity)

r त्रिज्या का एक बीकर बायीं ओर चित्रानुसार H ऊँचाई तक पानी (अपवर्तनांक $\frac{4}{3}$) से भरा जाता है। बीकर ω कोणीय चाल से घूमती हुई एक क्षैतिज टेबल पर रखा जाता है। यह पानी की सतह को वक्रीय बनाता है ताकि बीकर की परिधि पर तथा केन्द्र पर पानी के स्तर की ऊँचाई में अन्तर h (h<<H,h<<r) हैं, जैसा दायीं और चित्र में दिखाया है। इस सतह को लगभग R वक्रता त्रिज्या की गोलीय सतह लेते है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे सही है ?(g गुरूत्व के कारण त्वरण है)



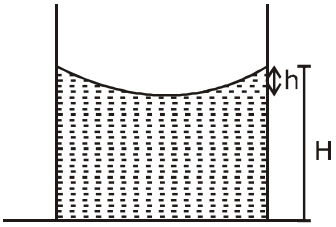
(A) $R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$

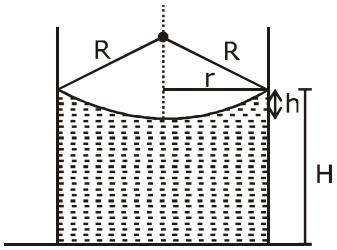
(B) $R = \frac{3r^2}{2h}$

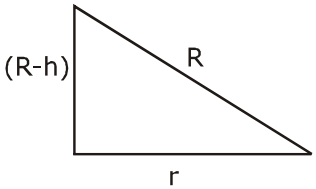
(C) Apparent depth of the bottom of the beaker is close to $\frac{3H}{2}\left(1 + \frac{\omega^2 H}{2g}\right)^{-1}$

(D) Apparent depth of the bottom of the beaker is close to $\frac{3H}{4}\left(1 + \frac{\omega^2 H}{4g}\right)^{-1}$

Sol. **A,D**

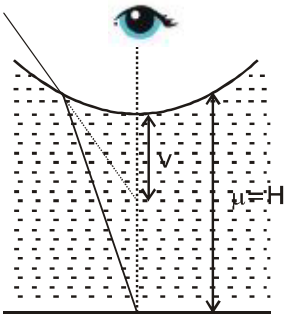






$R^2 = (R - h)^2 + r^2$
$R^2 = R^2 + h^2 - 2Rh + r^2$
$2Rh = h^2 + r^2$

$R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$



$$\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{R}$$

$$\frac{1}{v} - \frac{4}{3(-H+h)} = \frac{1-\frac{4}{3}}{R}$$

$$\frac{1}{v} + \frac{4}{3(H-h)} = \frac{-1}{3R}$$

$h << r$

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h} \qquad (h^2 = 0)$$

$$R = \frac{r^2}{2h}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{4}{3(H-h)} - \frac{2h}{3r^2}$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{2h}{3r^2} - \frac{4}{3(H-h)}$$

$h <<< H$

$$\frac{1}{v} = -\frac{4}{3H}\left(1 + \frac{3H}{4} \times \frac{2}{3}\frac{h}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{4}{3H}\left(1 + \frac{Hh}{2r^2}\right)$$

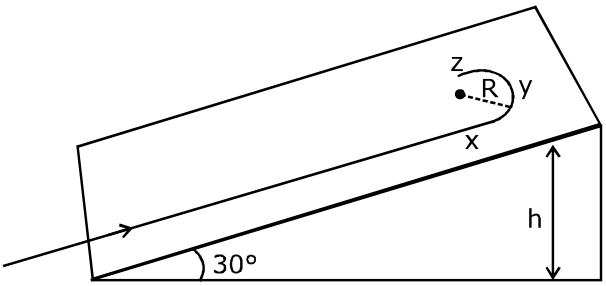
$$gh = \frac{\omega^2 r^2}{2} \Rightarrow \frac{r^2}{h} = \frac{2g}{\omega^2}$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{4}{3H}\left(1 + \frac{H}{2}\frac{\omega^2}{2g}\right)$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{4}{3H}\left(1+\frac{H\omega^2}{4g}\right)$$

$$|v| = \frac{3H}{4}\left(1+\frac{H\omega^2}{4g}\right)^{-1}$$

8. A student skates up a ramp that makes an angle 30° with the horizontal. He/she starts (as shown in the figure) at the bottom of the ramp with speed v_0 and wants to turn around over a semicircular path xyz of radius R during which he/she reaches a maximum height h (at point y) from the ground as shown in the figure. Assume that the energy loss is negligible and the force required for this turn at the highest point is provided by his/her weight only. Then (g is the acceleration due to gravity)
एक विद्यार्थी एक रेम्प के ऊपर फिसलता (skates) है, जो क्षैतिज से 30° को कोण बनाता है। वह चित्रानुसार v_0 चाल से रेम्प की तली पर प्रारंभ होता है तथा R त्रिज्या के एक अर्धवत्तीय पथ xyz पर मुड़ना (turn around) चाहता है, जिसके दौरान वह चित्रानुसार धरातल से अधिकतम ऊँचाई h (बिन्दु y पर) पहुँचता है। माना कि ऊर्जा हानि नगण्य है तथा उच्चतम बिन्दु पर इस घुमाव के लिए आवश्यक बल केवल उसके भार द्वारा प्रदान किया जाता है। तब (g गुरूत्वीय त्वरण हैं)



(A) $v_0^2 - 2gh = \frac{1}{2}gR$

(B) $v_0^2 - 2gh = \frac{\sqrt{3}}{2}gR$

(C) the centripetal force required at points x and z is zero
(D) the centripetal force required is maximum at points x and z

(A) $v_0^2 - 2gh = \frac{1}{2}gR$

(B) $v_0^2 - 2gh = \frac{\sqrt{3}}{2}gR$

(C) x तथा z बिन्दुओं पर आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल शून्य है
(D) x तथा z बिन्दुओं पर आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल अधिकतम है

Sol. **A,D**

Given : The force required for turn over a semi circular path at the highest point is provided by his/ her weight only so at that balancing situation

$$mg \sin\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$mg \times \sin 30° = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{gR}{2} = v^2 \qquad ....(i)$$

From energy conservation

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2} mv^2$$

$$v_0^2 - 2gh = v^2$$

$$v_0^2 - 2gh = \frac{gR}{2}$$

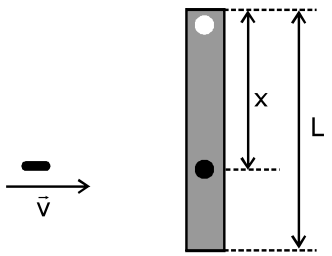
Option A correct

(D)

As gravitation force is not providing centripetal force at x and z that's why maximum force is applied on x and z for circular motion.

9. A rod of mass m and length L, pivoted at one of its ends, is hanging vertically. A bullet of the same mass moving at speed v strikes the rod horizontally at a distance x from its pivoted end and gets embedded in it. The combined system now rotates with angular speed ω about the pivot. The maximum angular speed ω_M is achieved for $x = x_M$. Then

m द्रव्यमान तथा L लम्बाई की एक छड़ इसके एक सिरे पर कीलकीत है, जो ऊर्ध्वाधर रूप से लटक रही हैं। v चाल से गतिमान समान द्रव्यमान की एक गोली इसके कीलकीत सिरे से x दूरी पर क्षैतिज रूप से छड़ से टकराती है तथा इसमें बैठ (embedded) जाती है। संयुक्त निकाय अब कीलक के परितः ω कोणीय चाल से घूमता है। अधिकतम कोणीय चाल ω_M, $x = x_M$ के लिए प्राप्त की जाती है। तब–'



(A) $\omega = \frac{3vx}{L^2 + 3x^2}$ (B) $\omega = \frac{12vx}{L^2 + 12x^2}$ (C) $x_M = \frac{L}{\sqrt{3}}$ (D) $\omega_M = \frac{v}{2L}\sqrt{3}$

Sol. **A,C,D**

From angular momentum conservation

$L_i = L_F$

$$\Rightarrow mvx = \left(\frac{mL^2}{3} + mx^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{mvx}{\left(\frac{mL^2}{3} + Mx^2\right)}$$

$\therefore$ m = mass of bullet and rod is same

$$\omega = \frac{vx}{\frac{L^2}{3} + x^2}$$

$$\omega = \frac{3vx}{L^2 + 3x^2} \qquad ...(i)$$

option (A) is correct

Now for maximum value of ω

$$\frac{d\omega}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{3vx}{L^2 + 3x^2}\right) = 0 \Rightarrow 3v\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{L^2 + 3x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{L^2}{x} + \frac{3x^2}{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{L^2}{x} + 3x\right)^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow (-1)\left(\frac{L^2}{x} + 3x\right)^{-2}\left(-\frac{L^2}{x^2} + 3\right) = 0$$

$$\frac{-L^2}{x^2} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{L^2}{3}$$

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Option (C) is correct

Now put this value in equation (i)

$$\omega_{max} = \frac{3v\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2 + 3(L^2/3)} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}v}{2L}$$

Option (D) is correct

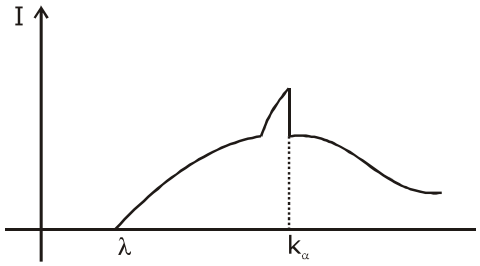
10. In an X-ray tube, electrons emitted from a filament (cathode) carrying current I hit a target (anode) at a distance d from the cathode. The target is kept at a potential V higher than the cathode resulting in emission of continuous and characteristic X-rays. If the filament current I is decreased to $\frac{I}{2}$, the potential difference V is increased to 2V, and the separation distance d is reduced to $\frac{d}{2}$, then

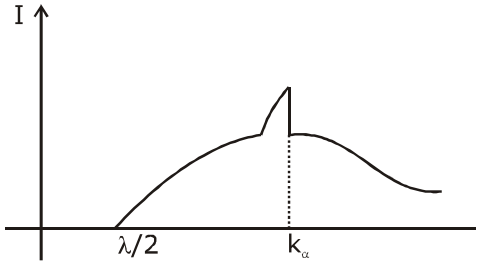
(A) the cut-off wavelength will reduce to half, and the wavelengths of the characteristic X-rays will remain the same
(B) the cut-off wavelength as well as the wavelengths of the characteristic X-rays will remain the same
(C) the cut-off wavelength will reduce to half, and the intensities of all the X-rays will decrease
(D) the cut-off wavelength will become two times larger, and the intensity of all the X-rays will decrease

एक X-किरण नली में, I धारावाही एक तन्तु (कैथोड़) से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन, कैथोड़ से d दूरी पर एक लक्ष्य (एनॉड़) से टकराते है। लक्ष्य कैथोड़ की तुलना मे उच्च विभव V पर रखा जाता है जिसके परिणामस्वरूप सतत् और अभिलाक्षणिक X-किरणों का उत्सर्जन होता है। यदि तन्तु धारा I से $\frac{I}{2}$ तक घटाई जाती है, विभवान्तर V से 2V तक बढ़ाया जाता है तथा पथक्करण दूरी d से $\frac{d}{2}$ तक घटाई जाती है तब–

(A) अंतक तरंगदैर्ध्य घटकर आधी हो जाएगी तथा अभिलाक्षणिक X-किरणों की तरंगदैर्ध्य समान रहेगी
(B) अंतक (cut-off) तरंगदैर्ध्य तथा अभिलाक्षणिक X-किरण की तरंगदैर्ध्य समान रहेगी
(C) अंतक तरंगदैर्ध्य घटकर आधी हो जाएगी तथा सभी X-किरणों की तीव्रतायें घटेगी
(D) अंतक तरंगदैर्ध्य दो गुना बड़ी (larger) हो जायेगी तथा सभी X-किरणों की तीव्रता घटेगी

Sol. **A,C**





$ev = \frac{hc}{\lambda}$

$v \propto \frac{1}{\lambda}$

$\lambda \propto \frac{1}{v}$

$v \rightarrow 2v$

$\lambda \rightarrow \lambda/2$

If current in filament is reduced then emitting electrons should be reduced thats why intensity of x-ray is reduced.

11. Two identical non-conducting solid spheres of same mass and charge are suspended in air from a common point by two non-conducting, massless strings of same length. At equilibrium, the angle between the strings is α. The spheres are now immersed in a dielectric liquid of density 800 kg m^{-3} and dielectric constant 21. If the angle between the strings remains the same after the immersion, then

(A) electric force between the spheres remains unchanged

(B) electric force between the spheres reduces

(C) mass density of the spheres is 840 kg m^{-3}

(D) the tension in the strings holding the spheres remains unchanged

समान द्रव्यमान और आवेश के दो एकसमान अचालकीय ठोस गोले, समान लम्बाई की दो अचालकीय द्रव्यमानरहीत रस्सियों द्वारा एक उभयनिष्ठ बिन्दु से हवा में लटकाये जाते है। साम्यावस्था पर, रस्सियों के बीच कोण α है। अब गोले परावैद्युतांक 21 तथा घनत्व 800 kg m^{-3} के एक परावैद्युत द्रव में डुबोये जाते हैं। यदि डुबने के पश्चात रस्सियों के बीच कोण समान रहता है, तब–

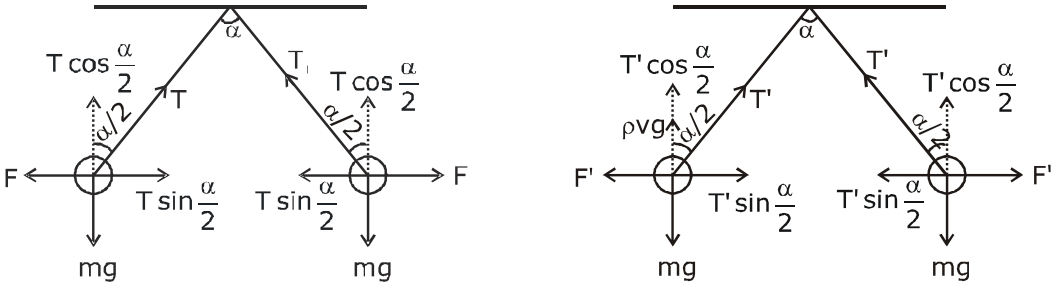
(A) गोलों के बीच वैद्युत बल अपरिवर्तित रहता है।

(B) गोलों के बीच वैद्युत बल घटता है।

(C) गोलों का द्रव्यमान घनत्व 840 kg m^{-3} है।

(D) गोलों को धारण करने (holding) वाली रस्सियों में तनाव अपरिवर्तित रहता है।

Sol. **(Official Answer) B,C**



$$T \sin \frac{\alpha}{2} = F$$

$$T' \sin \frac{\alpha}{2} = F'$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{F}{F'}$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 21}\frac{q^2}{r^2}}$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{21}{1}$$

$$T' = \frac{T}{21}$$

$T \cos \frac{\alpha}{2} = mg$

$T' \cos \frac{\alpha}{2} = mg - \rho vg$

$\frac{T' \cos \frac{\alpha}{2}}{T' \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{mg - \rho vg}{mg}$

$\frac{1}{21} = 1 - \frac{\rho vg}{dvg}$

$\frac{\rho}{d} = 1 - \frac{1}{21}$

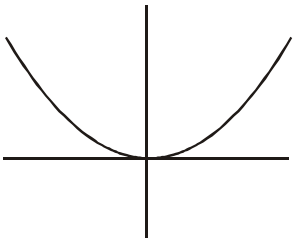
$\frac{\rho}{d} = \frac{20}{21}$

$d = \frac{21}{10} \times 800$

$d = 840 \text{ kg/m}^3$

12. Starting at time t = 0 from the origin with speed 1 ms^{-1}, a particle follows a two-dimensional trajectory in the x-y plane so that its coordinates are related by the equation $y = \frac{x^2}{2}$. The x and y components of its acceleration are denoted by a_x and a_y, respectively. Then
(A) $a_x = 1\ ms^{-2}$ implies that when the particle is at the origin, $a_y = 1\ ms^{-2}$
(B) $a_x = 0$ implies $a_y = 1\ ms^{-2}$ at all times
(C) at t = 0, the particle's velocity points in the x-direction
(D) $a_x = 0$ implies that at t = 1 s, the angle between the particle's velocity and the x axis is 45°
समय t = 0 पर 1 ms^{-1} चाल से मूल बिन्दु से प्रारंभ एक कण x-y तल में एक द्वि–विमीय प्रक्षेप पथ का अनुसरण करता है ताकि इसके निर्देशांक समीकरण $y = \frac{x^2}{2}$ द्वारा सम्बन्धित है। इसके त्वरण के x तथा y घटक क्रमशः a_x व a_y द्वारा निरूपित है। तब–
(A) $a_x = 1\ ms^{-2}$ बताता है कि जब कण मूल बिन्दु पर है, तब $a_y = 1\ ms^{-2}$
(B) $a_x = 0$ बताता है कि पूरे समय $a_y = 1\ ms^{-2}$ है।
(C) t = 0 पर, कण का वेग x-दिशा मे निर्देशित है।
(D) $a_x = 0$ बताता है कि t = 1 s पर, कण के वेग तथा x अक्ष के बीच कोण 45° है।

Sol. **A,B,C,D or B,C,D**



t = 0, x = 0, u = 1m/sec

$y = \frac{x^2}{2}$

$v_y = \frac{2x}{2} v_x$

$v_y = xv_x$

$a_y = xa_x + v_x^2$

option A

$\frac{dy}{dx} = x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 1$

$R_c = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{1}$

at x = 0 $\qquad R_c = 1$

$\therefore a_y = \frac{v^2}{R_c} = \frac{1^2}{1} = 1 \text{ m/s}^2$

at x = 0

$a_y = 1 \text{ m/s}^2$

independent of a_x

option (B)

if $a_x = 0$

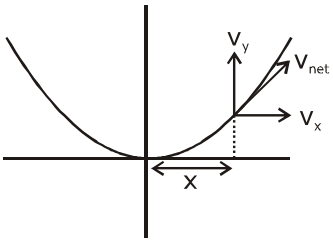
$a_y = 0 + v_x^2 = 1 \text{ m/sec}^2$

option (C)

$v_y = xv_x$ at = x = 0 at t = 0

$v_y = 0 \quad v_x = 1$ m/sec

Option (d)



x = 1m

$\frac{v_y}{v_x} = \tan\theta = x = 1$

$\theta = 45°$

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer the each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme:</u>

Full Marks	: +4	If ONLY the correct numerical value is entered;
Zero Marks	: 0	In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

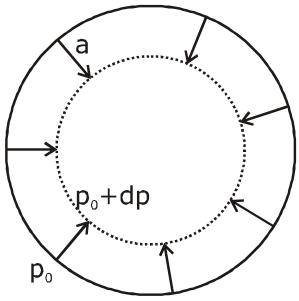
पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।
शून्य अंक	: 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

13. A spherical bubble inside water has radius R. Take the pressure inside the bubble and the water pressure to be p_0. The bubble now gets compressed radially in an adiabatic manner so that its radius becomes (R – a). For $a \ll R$ the magnitude of the work done in the process is given by $(4\pi p_0 R a^2)X$, where X is a constant and $\gamma = C_p/C_v = \frac{41}{30}$. The value of X is_____.

पानी के अन्दर एक गोलीय बुलबुले की त्रिज्या R है। बुलबुले के अन्दर दाब तथा पानी का दाब p_0 लेते है। अब बुलबुले को एक रूद्धोष्म ढंग में त्रिज्य रूप से संपीडीत किया जाता है ताकि इसकी त्रिज्या (R – a) हो जाती हैं। $a \ll R$ के लिए, प्रक्रम में किये गये कार्य का परिमाण $(4\pi p_0 R a^2)X$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ X एक नियतांक है तथा $\gamma = C_p/C_v = \frac{41}{30}$ है। X का मान है–

Sol. 2.05



$dv = 4\pi R^2 a$

pv^{γ} = constant

$v^{\gamma}dp + p\gamma v^{\gamma-1}\, dv = 0$

$$\Rightarrow dp = -\gamma p \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{-\gamma p_0 4\pi R^2 a}{v}$$

Work done, $W = \Delta p_{avg.} \times dv$

$$= \left|\frac{dp}{2}\right| 4\pi R^2 a$$ (as for small changes $\Delta p_{avg} = \frac{dp}{2}$ by considering linear variation in pressure)

$$= \frac{\gamma p_0 4\pi R^2 a \times 4\pi R^2 a}{2v}$$

$$= \frac{\gamma p_0 4\pi R^2 a \times 4\pi R^2 a}{2 \times \frac{4}{3}\pi R^3}$$

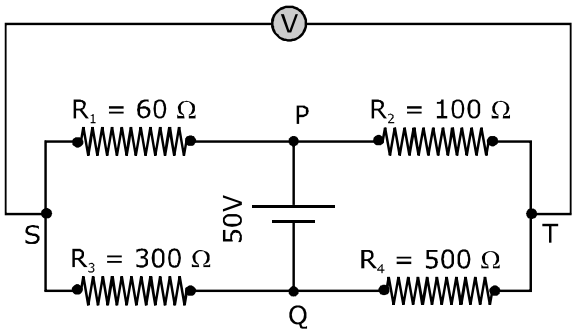
$$= \frac{3\gamma p_0 4\pi R a^2}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{41}{30} \times 4\pi p_0 R a^2$$

$= 2.05\ (4\pi p_0 R a^2)$ $\quad \therefore x = 2.05$ Ans.

14. In the balanced condition, the values of the resistances of the four arms of a Wheatstone bridge are shown in the figure below. The resistance R_3 has temperature coefficient 0.0004 °C^{-1}. If the temperature of R_3 is increased by 100 °C, the voltage developed between S and T will be _____ volt.

सन्तुलन स्थिति में, एक व्हीटस्टोन सेतु की चार भुजाओं के प्रतिरोधों के मान चित्रानुसार है। प्रतिरोध R_3 का तापमान गुणांक 0.0004 °C^{-1} है। यदि R_3 का तापमान 100 °C से बढ़ाया जाता है, तब S व T के बीच उत्पन्न वोल्टता वोल्ट में होगी–

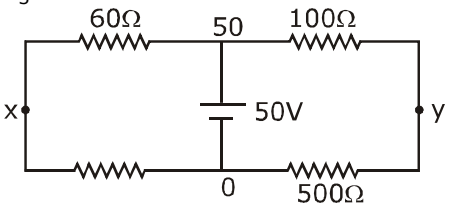


Sol. **0.27**

$R_3 = 300\ (1 + \alpha\Delta T)$

$R_3 = 300\ (1 + 0.0004 \times 100)$

$R_3 = 312\ \Omega$



$\frac{x-0}{312} + \frac{x-50}{60} = 0$

$\frac{x}{52} + \frac{x}{10} = 5$

$62x = 520 + 5$

$x = \frac{520+5}{62}$

$x = \frac{2600}{62} = 41.93$

$\frac{y-50}{100} + \frac{y-0}{500} = 0$

$y - 50 + \frac{4}{5} = 0$

$\frac{6y}{5} = 50$

$y = \frac{250}{6}$

$y = 41.66$

$x = 41.93 - 41.66 = 0.27$

15. Two capacitors with capacitance values $C_1 = 2000 \pm 10$ pF and $C_2 = 3000 \pm 15$ pF are connected in series. The voltage applied across this combination is $V = 5.00 \pm 0.02$ V. The percentage error in the calculation of the energy stored in this combination of capacitors is _____.

$C_1 = 2000 \pm 10$ pF तथा $C_2 = 3000 \pm 15$ pF धारिता के दो संधारित्र श्रेणी में जोड़े जाते है। इस संयोजन के सिरों पर आरोपित वोल्टता $V = 5.00 \pm 0.02$ V है। संधारित्रों के इस संयोजन में संचित ऊर्जा की गणना में प्रतिशत त्रुटि हैं–

Sol. **1.30**

$$E_T = \frac{1}{2} C_{net} v^2$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{2000} + \frac{1}{3000}$$

$$\frac{dC}{C^2} = \frac{dC_1}{C_1^2} + \frac{dC_2}{C_2^2} \qquad \frac{1}{C} = \frac{3+2}{6000} = \frac{5}{6000}$$

$$C = \frac{6000}{5} = 1200$$

$$\left(\frac{dC}{C}\right) = \left(\frac{dC_1}{C_1^2} + \frac{dC_2}{C_2^2}\right) C$$

$$\frac{dC}{C} = \left[\frac{10}{(2000)^2} + \frac{15}{(3000)^2}\right] 1200$$

$$\frac{dC}{C} = \left(\frac{10}{4} + \frac{15}{9}\right)\left(\frac{1200}{10^6}\right)$$

$$\frac{dC}{C} = (2.5 + 1.67)\left(\frac{1200}{10^4}\right)$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{4.17 \times 12}{10^4}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{dC}{C} + \frac{2\Delta V}{V} = \left(\frac{4.17 \times 12}{10^4} + \frac{2 \times 0.02}{5 \times 100}\right)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \left(\frac{50.64}{10^4} + \frac{4}{5 \times 100}\right)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = (0.504 + 0.8) = 1.30$$

16. A cubical solid aluminium (bulk modulus = $-V\frac{dP}{dV}$ = 70 GPa) block has an edge length of 1 m on the surface of the earth. It is kept on the floor of a 5 km deep ocean. Taking the average density of water and the acceleration due to gravity to be 10^3 kg m^{-3} and 10 ms^{-2}, respectively, the change in the edge length of the block in mm is _____.

एक घनीय ठोस एल्युमिनियम (बल्क मापांक = $-V\frac{dp}{dv}$ = 70 GPa) ब्लॉक की 1 m लम्बाई की एक भुजा (edge) पथ्वी की सतह पर है। यह एक 5 km गहरे समुद्र के फर्श पर रखा जाता है। पानी का घनत्व तथा गुरूत्वीय त्वरण क्रमशः 10^3 kg m^{-3} व 10 ms^{-2} लेते है। तब ब्लॉक की भुजा की लम्बाई में mm में परिवर्तन है–

Sol. **0.23 to 0.24**

$$B = V\frac{dP}{dV}$$

$$70 \times 10^9 = \frac{V}{dV} \times 10^3 \times 10 \times 5 \times 10^3$$

$$7 \times 10^9 = \frac{V}{dV} \times 10^6 \times 5$$

$$7000 = \frac{V}{dV} \times 5$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{5}{7000}$$

$V = l^3$

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dl}{l}$$

$$\frac{3dl}{l} = \frac{5}{7000}$$

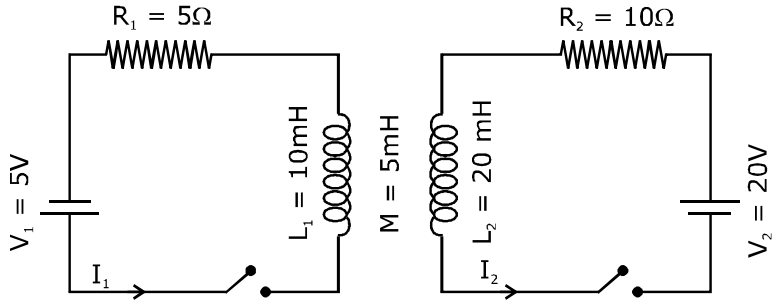
$$\frac{dl}{l} = \frac{5}{21000}$$

$$\frac{dl}{l} = \left(\frac{5}{21}\right) mm$$

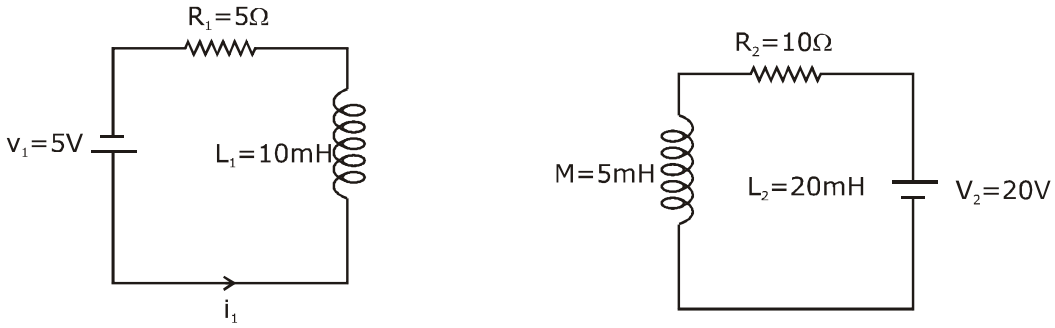
$dl = 0.238$ mm

17. The inductors of two LR circuits are placed next to each other, as shown in the figure. The values of the self-inductance of the inductors, resistances, mutual-inductance and applied voltages are specified in the given circuit. After both the switches are closed simultaneously, then total work done by the batteries against the induced EMF in the inductors by the time the currents reach their steady state values is_____ mJ.

दो LR परिपथों के प्रेरक चित्रानुसार एक दूसरे के बगल में रखे गये है। प्रेरकों के स्वप्रेरकत्व, प्रतिरोध, अन्योन्य प्रेरकत्व तथा आरोपित वोल्टता दिये गये परिपथ में उल्लेखित है। दोनों स्विच एक साथ बन्द होने के पश्चात्, जब तक धारायें उनके स्थिर अवस्था मानों तक पहुँचती है, तब तक प्रेरकों में प्रेरित वि. वा. बल के विरूद्ध बैट्रीयों द्वारा कुल किया गया कार्य _____ mJ है।



Sol. **55**



$$\varepsilon_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{Mdi_2}{dt}$$

$$dW = \varepsilon_1 i_1 dt$$

$$dW_1 = L_1 (di_1)\, i_1 + M(di_2)\, i_1$$

$$dW_2 = L_2 (di_2)\, i_2 + M(di_1)\, i_2$$

$$\int_0^W (dW_1 + dW_2) = \int_0^{i_1} L_1(di_1)i_1 + \int_0^{i_2} L_2(di_2)i_2 + M\int_0^{i_1 i_2} d(i_1 i_2)$$

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M(i_1 i_2)$$

$$W = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times 4 + 5 \times 10^{-3} \times 2$$

$$W = 55 \times 10^{-3} = 55 \text{ mJ}$$

18. A container with 1 kg of water in it is kept in sunlight, which causes the water to get warmer than the surroundings. The average energy per unit time per unit area received due to the sunlight is 700 Wm^{-2} and it is absorbed by the water over an effective area of 0.05 m^2. Assuming that the heat loss from the water to the surroundings is governed by Newton's law of cooling, the difference (in °C) in the temperature of water and the surroundings after a long time will be _____. (Ignore effect of the container, and take constant for Newton's law of cooling = 0.001 s^{-1}, Heat capacity of water = 4200 J kg^{-1} K^{-1}).

1 kg पानी के साथ एक पात्र सूर्य के प्रकाश में रखा है, जिसके कारण पानी परिवेश से अधिक गर्म हो जाता है। सूर्य प्रकाश के कारण प्राप्त प्रति इकाई समय प्रति इकाई क्षेत्रफल औसत ऊर्जा 700 Wm^{-2} है तथा यह 0.05 m^2 के प्रभावी क्षेत्रफल पर पानी द्वारा अवशोषित की जाती है। माना कि पानी से परिवेश में उष्मा हानि न्यूटन के शीतलन के नियम द्वारा नियंत्रित (governed) है, तब एक लम्बे समय पश्चात् पानी तथा परिवेश के तापमान में अन्तर (°C में) होगा (पात्र के प्रभाव को नगण्य लेते है, तथा न्यूटन के शीतलन के नियम के लिए नियतांक = 0.001 s^{-1}, पानी की उष्मीय धारिता = 4200 J kg^{-1} K^{-1} है) :

Sol. **8.33**

$$\left(\frac{dT}{dt}\right) = \left(\frac{eA\sigma 4T_0^3}{ms}\right)(T - T_0)$$

$ms = 4200$

$$\frac{eA\sigma 4T_0^3}{ms} = 0.001$$

$eA\sigma 4T_0^3 = 0.001 \times 4200 = 4.2$

Given, $\frac{dQ}{dt \times \text{area}} = 700$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right) = 700 \times 0.05$$

$= 35$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right) = (eA\sigma 4T_0^3)\,(T - T_0)$$

$35 = 4.2\,\Delta T$

$$\Delta T = \frac{35 \times 10}{42} = \frac{50}{6} = 8.33$$

JEE ADVANCED
27 September 2020
Chemistry Paper - 2

SECTION–1 (Maximum marks :18)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each questionis a **SINGLE DIGIT INTEGER ranging from 0 TO 9, BOTH INCLUSIVE.**
- For Each Question, enter the correct integer corresponging to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

  Full marks : +3 If ONLY the correct integer is entered;
  Zero Marks : 0 If the questio is unanswered.
  Negative Marks : –1 In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, एक एकल अंक पूर्णांक है। दोनों सम्मिलित है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर दर्ज करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर के अनुरूप सही पूर्णांक दर्ज करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

  पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।
  शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
  ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

---

1. The 1st , 2nd , and the 3rd ionization enthalpies, I_1 , I_2 and I_3 , of four atoms with atomic numbers n, n + 1, n + 2, and n + 3 , where n < 10, are tabulated below. What is the value of n ?

Atomic number	Ionization Enthalpy (kJ/mol)		
	I_1	I_2	I_3
n	1681	3374	6050
n + 1	2081	3952	6122
n + 2	496	4562	6910
n + 3	738	1451	7733

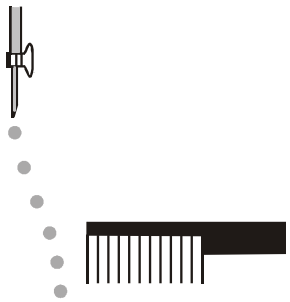
चार परमाणुओं की प्रथम, द्वितीय तथा ततीय आयनीकरण एन्थैली I_1 , I_2 तथा I_3 है जिसके परमाणु क्रमांक n, n + 1, n + 2 तथा n + 3 है, जहां पर n < 10, नीचे सारणीबद्ध है। n का मान क्या है ?

परमाणु क्रमांक	आयनीकरण एन्थैली (kJ/mol)		
	I_1	I_2	I_2
n	1681	3374	6050
n + 1	2081	3952	6122
n + 2	496	4562	6910
n + 3	738	1451	7733

Ans. **9**

According to the tabulated data
Element with Atomic number (n + 2), should be alkali metal
Hence atomic number = 11
= (n + 2) = 11
n = 9
'n' can't be '1'

2. Consider the following compounds in the liquid form :
O_2 , HF, H_2O , NH_3 , H_2O_2 , CCl_4 , $CHCl_3$, C_6H_6 , C_6H_5Cl.
When a charged comb is brought near their flowing stream, how many of them show deflection as per the following figure ?
द्रव रूप में निम्नलिखित यौगिकों पर विचार कीजिए :
O_2 , HF, H_2O , NH_3 , H_2O_2 , CCl_4 , $CHCl_3$, C_6H_6 , C_6H_5Cl.
जब आवेशित कंघी को उनकी प्रवाहित धारा के पास लाया जाता है तो निम्न आकति के अनुसार उनमें कितने विक्षेप दिखाई देते है।



Ans. **6**

Only polar molecules deflected by charged comb.
HF, H_2O , NH_3 , H_2O_2 , $CHCl_3$, C_6H_5Cl

3. In the chemical reaction between stoichiometric quantities of $KMnO_4$ and KI in weakly basic solution, what is the number of moles of I_2 released for 4 moles of $KMnO_4$ consumed ?
दुर्बल क्षारीय विलयन में $KMnO_4$ तथा KI के रससमीकरणमिति मात्रा के मध्य अभिक्रिया में प्रयुक्त $KMnO_4$ के 4 मोल से मुक्त I_2 के मोलों की संख्या है ?

Ans. **6**

$KMnO_4 + KI \xrightarrow[\text{Basic}]{\text{weak}} MnO_2 + I_2$

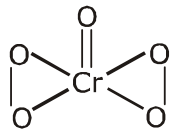
n-factor = 3 n-actor = 2
Equivalents of $KMnO_4$ = Equivalents of I_2
3 × moles of $KMnO_4$ = 2 × moles of I_2
Moles of I_2 = 6 moles

4. An acidified solution of potassim chromate was layered with an equal volume of amyl alcohol. When it was shaken after the addition of 1 mL of 3% H_2O_2, a blue alcohol layer was obtained. The blue color is due to the formation of a chromium (VI) compound 'X'. What is the number of oxygen atoms bonded to chromium through only single bonds in a molecule of X ?

पौटेशियम क्रोमेट का एक अम्लीय विलयन, एमाइल एल्कोहॉल की समान मात्रा के साथ बहुस्तरीय है। जब 3% H_2O_2 के 1 mL को जोड़ने के बाद इसे हिलाया जाता है तो नीले एल्कोहॉल की परत प्राप्त होती है। नीला रंग क्रोमियम (IV) यौगिक 'X' के बनने के कारण होता है। X के अणु में केवल एकल बन्धन के माध्यम से क्रोमियम से बंधे ऑक्सीजन परमाणुओं की संख्या कितनी है ?

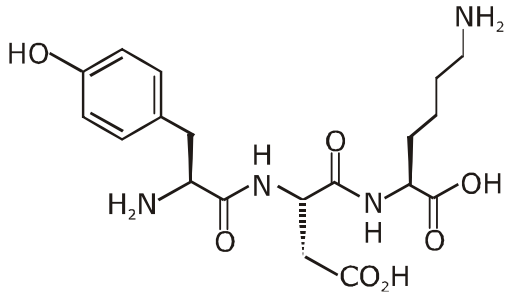
Ans. **4**

Blue colour compound of 'Cr' is CrO_5.



5. The structure of a peptide is given below.

पेप्टाइड़ की संरचना नीचे दी गई है–



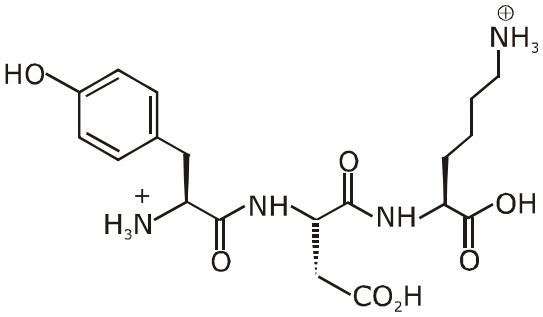
If the absolute values of the net charge of the peptide at pH = 2, pH = 6, and pH = 11 are $|z_1|$, $|z_2|$, and $|z_3|$, respectively, then what is $|z_1| + |z_2| + |z_3|$?

यदि pH = 2, pH = 6 तथा pH = 11 पर पेप्टाइड़ के कुल आवेश का पूर्ण मान क्रमशः $|z_1|$, $|z_2|$ तथा $|z_3|$ है तब $|z_1| + |z_2| + |z_3|$ क्या है।

Ans. 5

(i) At pH = 2 (Highly acidic)

In highly acidic medium the given tripeptide exist as cationic form.

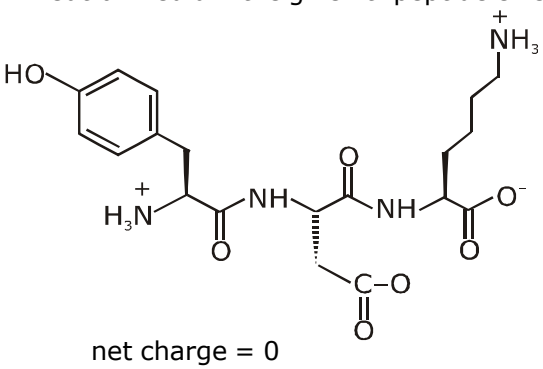


net charge +2

$|Z_1| = 2$ at pH = 2

(ii) At pH = 6 (neutral solution)

In neutral medium the given tripeptide exist as Zwitter ion.

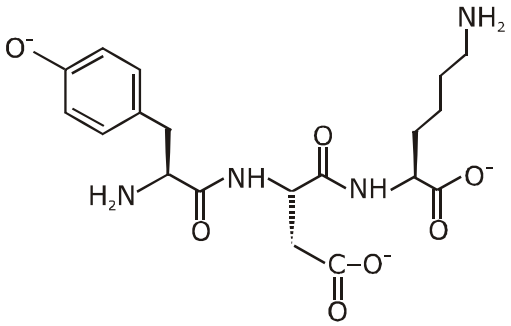


net charge = 0

$|Z_2| = 0$ at pH = 6

(iii) at pH = 11 (basic medium)

In basic medium the given tripeptide exist in anionic form.



Net charge = –3

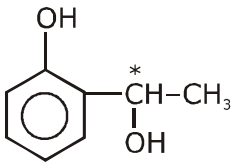
$|Z_3| = 3$

Therefore $|Z_1| + |Z_2| + |Z_3| = 2 + 0 + 3 = 5$

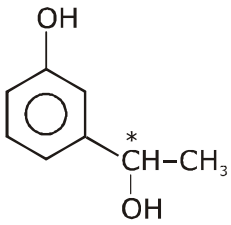
6. An organic compound ($C_8H_{10}O_2$) rotates plane-polarized light. It produces pink color with neutral $FeCl_3$ solution. What is the total number of all the possible isomers for this compound ?
एक कार्बनिक यौगिक ($C_8H_{10}O_2$) समतल ध्रुवीय प्रकाश का घूर्णन करता है। यह उदासीन $FeCl_3$ विलयन के साथ गुलाबी रंग देता है इस यौगिक के लिए सभी सम्भव समावयवीयों की कुल संख्या क्या है ?

Ans. **6**

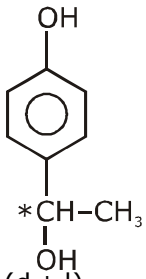
DOU of $C_8H_{10}O_2$ is 4.
It gives pink colour with neutral $FeCl_3$ solution.It means phenolic group should be present in the compound.



(d + l)



(d + l)



(d + l)

Total optically active isomer = 6

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- Section contains **SIX (06)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer the each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme:</u>

Full Marks	: +4	If only (all the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

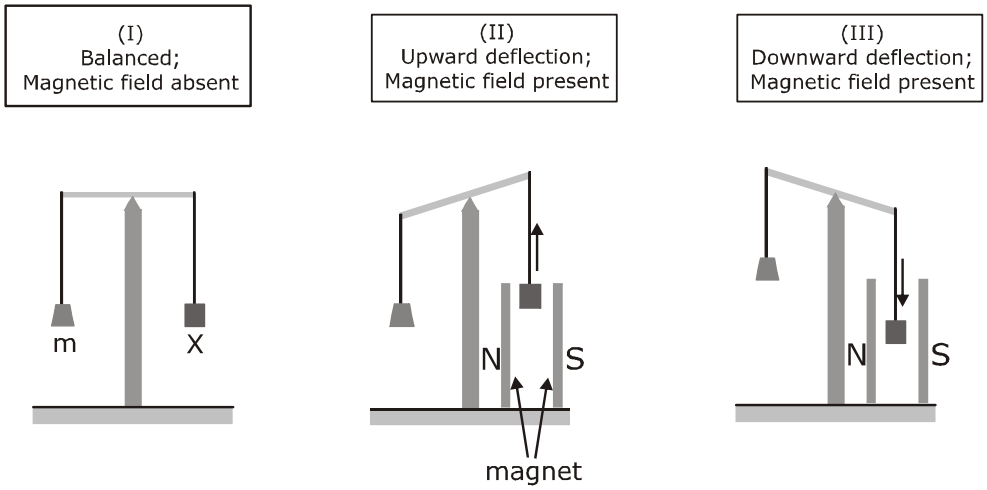
भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2 अन्य सभी स्थितियों में।

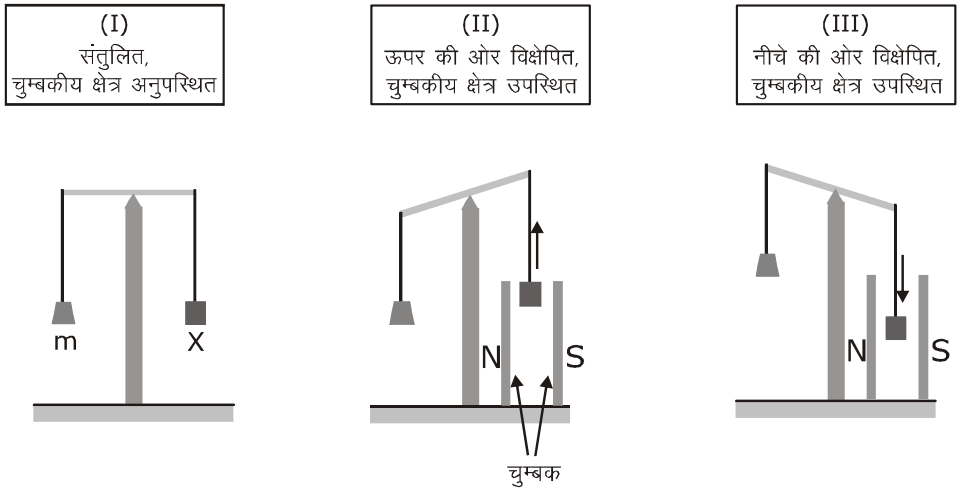
---

7. In an experiment, m grams of a compound X (gas/liquid/solid) taken in a container is loaded in a balance as shown in figure I below. In the presence of a magnetic field, the pan with X is either deflected upwards (figure II), or deflected downwards (figure III), depending on the compound X. Identify the correct statement(s).



(A) If X is $H_2O(l)$, deflection of the pan is upwards.
(B) If X is $K_4[Fe(CN)_6](s)$, deflection of the pan is upwards.
(C) If X is $O_2(g)$, deflection of the pan is downwards.
(D) If X is $C_6H_6(l)$, deflection of the pan is downwards.

एक प्रयोग में, एक कंटेनर में लिये गये एक यौगिक X (गैस/द्रव/ठोस) के m ग्राम को एक संतुलन में लाद दिया जाता है जैसा कि नीचे चित्र I में दिखाया गया है। चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में, यौगिक X पर अवलंबित, X के साथ पलड़ा या तो ऊपर कीओर विक्षेपित होता है (आकति II) या नीचे की ओर विक्षेपित होता है (आकति III) । सही कथन (नों) को पहचानियें।

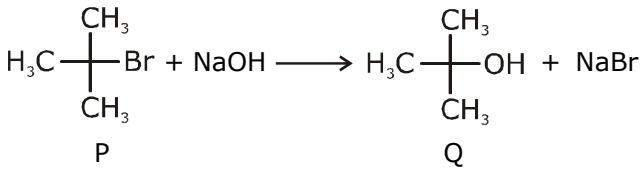


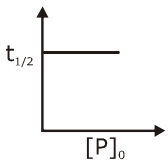
(A) यदि X , $H_2O(l)$ है तो पलडा ऊपर की ओर विक्षेपित होता है।
(B) यदि X, $K_4[Fe(CN)_6](s)$ है तो पलड़ा ऊपर की ओर विक्षेपित होता है।
(C) यदि X, $O_2(g)$ है तो पलड़ा नीचे की ओर विक्षेपित होता है।
(D) यदि X, $C_6H_6(l)$ है तो पलड़ा नीचे की ओर विक्षेपित होता है।

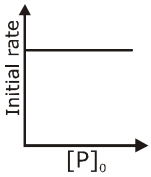
Ans. **A,B,C**

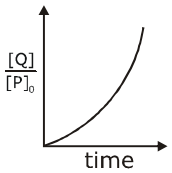
Paramagnetic substances are attached by magnetic fields & diamagnetic substances are repelled by magnetic field.
O_2 - is paramagnetic
H_2O & $C_6H_6(l)$ - are Diamagnetic
& $K_4[fe(CN)_6]$ is also Diamagnetic

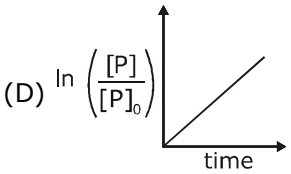
8. Which of the following plots is(are) correct for the given reaction ?
($[P]_0$ is the initial concentration of P)



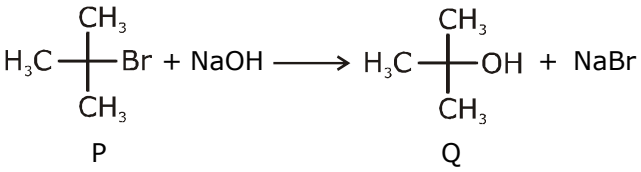
(A) 

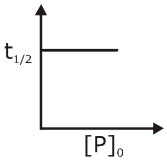
(B) 

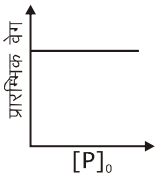
(C) 

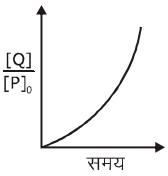
(D) 

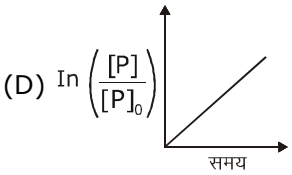
दी गई अभिक्रिया के लिए निम्नलिखित में से कौनसा आरेख सही है ?
($[P]_0$, P की प्रारम्भिक सान्द्रता है)



(A) 

(B) 

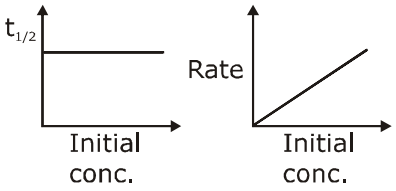
(C) 

(D) 

Ans. **A**

As there is no inversion. Hence should be

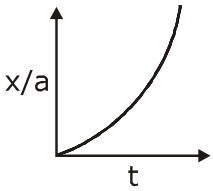
$S_N1 \rightarrow 1^{st}$ order



(C) $x = a\left\{1 - e^{-kt}\right\}$

$x/a = 1 - e^{-kt}$

$\frac{x}{a} = \frac{Q}{P_0}$



9. Which among the following statement(s) is(are) true for the extraction of aluminium from bauxite ?
(A) Hydrated Al_2O_3 precipitates, when CO_2 is bubbled through a solution of sodium aluminate.
(B) Addition of Na_3AlF_6 lowers the melting point of alumina.
(C) CO_2 is evolved at the anode during electrolysis.
(D) The cathode is a steel vessel with a lining of carbon.
बॉक्साइट से ऐल्युमिनियम के निष्कर्षण के लिए निम्नलिखित मे से कौनसा/कौनसे कथन सही है ?
(A) हाइड्रेटेड Al_2O_3 अवक्षेपित होता है, जब सोडियम ऐल्युमिनेट के माध्यम से CO_2 को बुदबुदाया जाता है।
(B) Na_3AlF_6 के मिलाने पर ऐलुमिना का गलनांक कम हो जाता है।
(C) CO_2 विद्युत अपघटन के दौरान एनोड़ पर विकसित होते है।
(D) कैथोड़ एक स्टील का पात्र है जिसमें कार्बन की परत होती है।

Ans. **A,B,C,D**
Refer topic metallurgy
extraction of Al (Hall's process and Hall Heroult's electrolytic cell)

10. Choose the correct statement(s) among the following.
(A) $SnCl_2 \cdot 2H_2O$ is a reducing agent.
(B) SnO_2 reacts with KOH to form $K_2[Sn(OH)_6]$.
(C) A solution of $PbCl_2$ in HCl contains Pb^{2+} and Cl^- ions.
(D) The reaction of Pb_3O_4 with hot dilute nitric acid to give PbO_2 is a redox reaction.
निम्नलिखित मे से सही कथन/कथनों को चुनिए–
(A) $SnCl_2 \cdot 2H_2O$ एक अपचायक कारक है।
(B) SnO_2 , KOH के साथ क्रिया करके $K_2[Sn(OH)_6]$ का निर्माण करता है।
(C) HCl में $PbCl_2$ के विलयन में Pb^{2+} तथा Cl^- आयन शामिल होते है।
(D) Pb_3O_4 गर्म तनु नाइट्रिक अम्ल के साथ अभिक्रिया करने पर PbO_2 देता है जो कि एक रेडॉक्स अभिक्रिया है।

Ans. **A,B**

$SnO_2 + KOH \longrightarrow K_2SnO_3 + H_2O$

or

Amphoteric $K_2[Sn(OH)_6]$

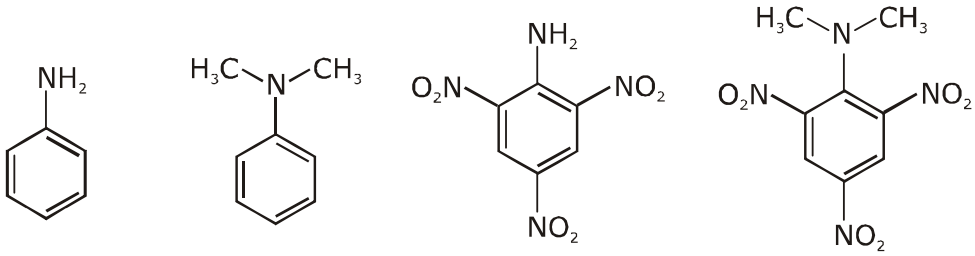
$PbCl_2 + HCl \longrightarrow H_2[PbCl_4]$

$Pb_3O_4 + HNO_3 \longrightarrow PbO_2 + Pb(NO_3)_2 + H_2O$

or

$2PbO.PbO_2$ (Non redox reaction)

11. Consider the following four compounds I, II, III, and IV.



I II III IV

Choose the correct statement(s).

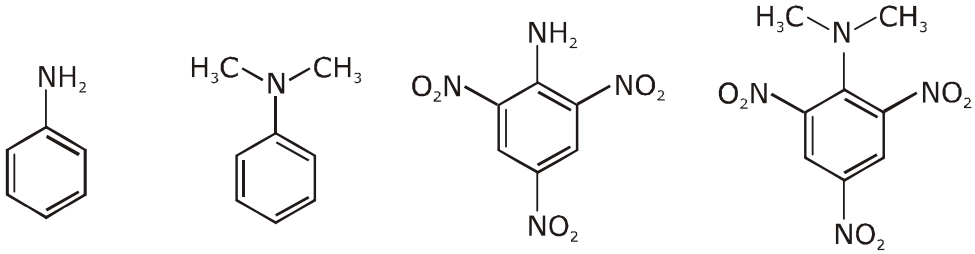
(A) The order of basicity is II > I > III > IV.

(B) The magnitude of pK_b difference between I and II is more than that between III and IV.

(C) Resonance effect is more in III than in IV

(D) Steric effect makes compound IV more basic than III.

निम्नलिखित चार यौगिकों I, II, III तथा IV पर विचार कीजिए।



I II III IV

सही कथन/कथनों को चुनिये–

(A) क्षारकता का क्रम II > I > III > IV है।

(B) pK_b के परिमाण का I तथा II के मध्य अन्तर III तथा IV की तुलना में अधिक है।

(C) अनुनाद प्रभाव IV की तुलना में III में अधिक है।

(D) स्टेरिक प्रभाव यौगिक IV को यौगिक III की तुलना में अधिक क्षारीय बनाता है।

Ans. **C,D**

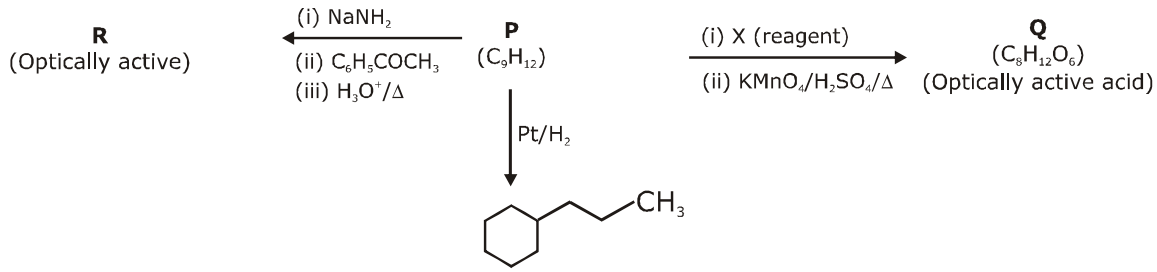
(A) Correct basic strength order of given compound.

(IV) > (II) > (I) > (III)

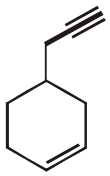
(B) Compound IV is a stronger base than III due to SIR effect, which basic strength difference between I & II is very less.

(C) In compound IV due to SIR effect both $-NO_2$ and $-N(CH_3)_2$ group will be out of plane hence resonance effect in compound IV is less.

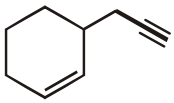
12. Consider the following transformations of a compound P.

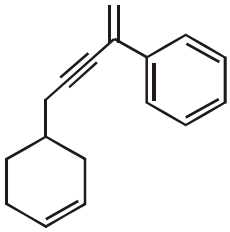


Choose the correct options(s).

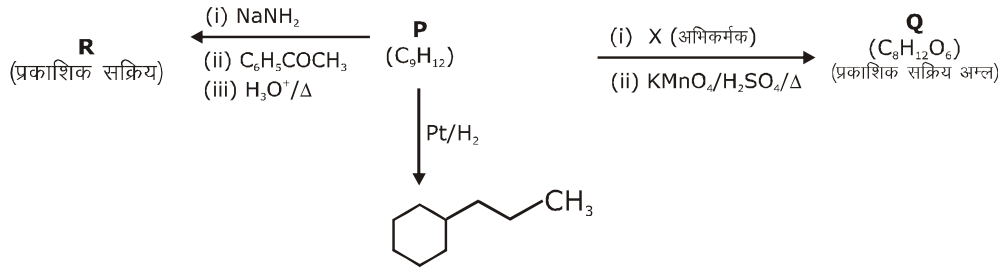
(A) P is 

(B) X is Pd-C/quinoline/H_2

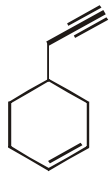
(C) P is 

(D) R is 

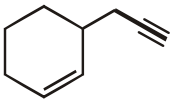
यौगिक P के निम्नलिखित रूपान्तरणों पर विचार कीजिए।

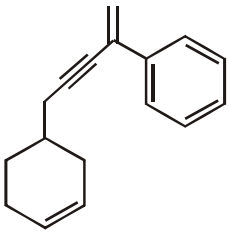


सही विकल्प/विकल्पों को चुनिए।

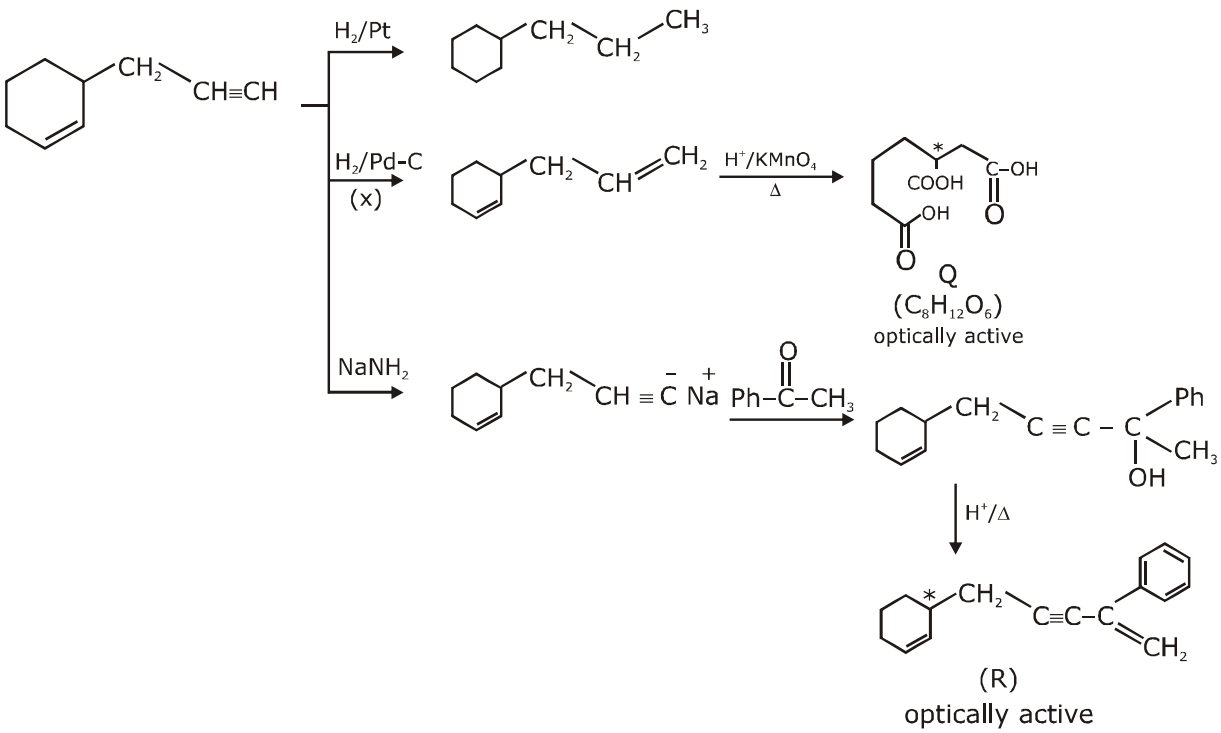
(A) P  है।

(B) X Pd-C/क्विनोलीन/H_2

(C) P  है।

(D) R  है।

Ans. B,C



SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer the each question will be evaluated according to the following marking scheme:

  Full Marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;

  Zero Marks : 0 In all other cases.

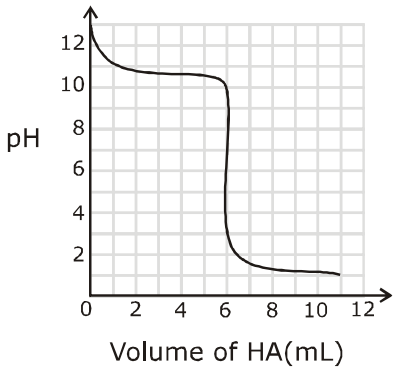
भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

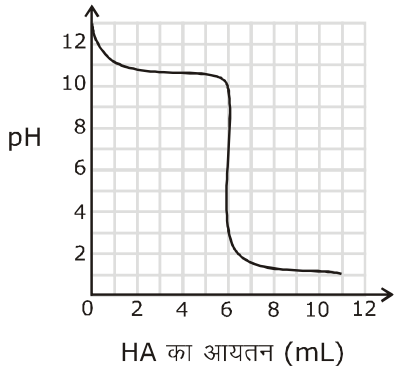
  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।

  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

13. A solution of 0.1 M weak base (B) is titrated with 0.1 M of a strong acid (HA). The variation of pH of the solution with the volume of HA added is shown in the figure below. What is the pK_b of the base ? The neutralization reaction is given by $B + HA \rightarrow BH^+ + A^-$.



0.1 M दुर्बल क्षार (B) का एक विलयन 0.1 M के प्रबल अम्ल (HA) के साथ अनुमापित होता है। विलयन के pH का परिवर्तन HA के आयतन के साथ निम्नलिखित आकति में दर्शाया गया है। क्षार का pK_b क्या है ? उदासीनीकरण अभिक्रिया को $B + HA \rightarrow BH^+ + A^-$ द्वारा दिया गया है।



Ans. **3.3**

$B + HA \longrightarrow BH^{\oplus} + A^-$

0.1M 0.1M

0mL pH = 13

3mL → 50% Neutralization pH = 11

6 mL → equivalence point pH = 3 to 9

50% Neutralization

$pOH = pk_b \longrightarrow$ **$P^{kb} = 3$**

equivalence point

$$pH = 6 \Rightarrow [H^+] = 10^{-6} = \sqrt{\frac{K_w}{K_b} \times \frac{0.1 \times 6}{12}}$$

$$10^{-12} = \frac{10^{-14} \times 10^{-1}}{K_b} \times \frac{1}{2}$$

$k_b = 5 \times 10^{-4}$

$pk_b = 4 - 0.7 = 3.3$

14. Liquids A and B form ideal solution for all compositions of A and B at 25 °C. Two such solutions with 0.25 and 0.50 mole fractions of A have the total vapor pressures of 0.3 and 0.4 bar, respectively. What is the vapor pressure of pure liquid B in bar ?

द्रव पदार्थ A तथा B 25 °C पर A तथा B के सभी अवयवों के लिए आदर्श विलयन बनाते है। A के 0.25 तथा 0.50 मोल अंशो वाले दो विलयनों का कुल वाष्प दाब क्रमशः 0.3 तथा 0.4 बार है। शुद्ध द्रव पदार्थ B का वाष्प दाब बार में कितना है।

Ans. **0.2**

$P_{Total} = 0.3 \quad x_A = \frac{1}{4} \Rightarrow 0.3 = \frac{1}{4} P_A^0 + \frac{3}{4} P_B^0$

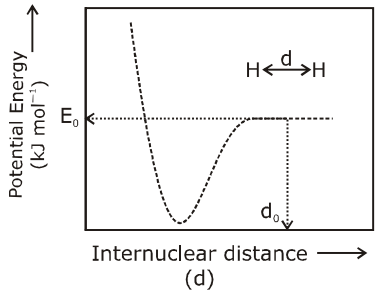
$P_{Total} = 0.4 \quad x_A = \frac{1}{2} \quad 0.4 = \frac{1}{2} P_A^0 + \frac{1}{2} P_B^0$

$1.2 = P_A^0 + 3P_B^0$

$0.8 = P_A^0 + P_B^0 \Rightarrow 2P_B^0 = 0.4$ bar

$P_B^0 = 0.2$

15. The figure below is the plot of potential energy versus internuclear distance (d) of H_2 molecule in the electronic ground state. What is the value of the net potential nergy E_0 (as indicated in the figure) in kJ mol^{-1}, for d = d_0 at which the electron-electron repulsion and the nucleus-nucleus repulsion energies are absent ? As reference, the potential energy of H atom is taken as zero when its electron and the nucleus are infinitely far apart.
Use Avogadro constant as 6.023×10^{23} mol^{-1} .



Ans. **–5242.42**
P. E of 2 H-atoms

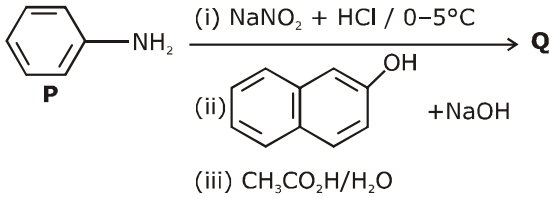
$= -2 \times 13.6 \times \frac{z^2}{n^2}$ ev/atom + $(-2 \times 13.6 \times \frac{z^2}{n^2})$ ev/ atom

$= -2 \times 2 \times 13.6 \times \frac{(1)^2}{(1)^2}$ ev/atom

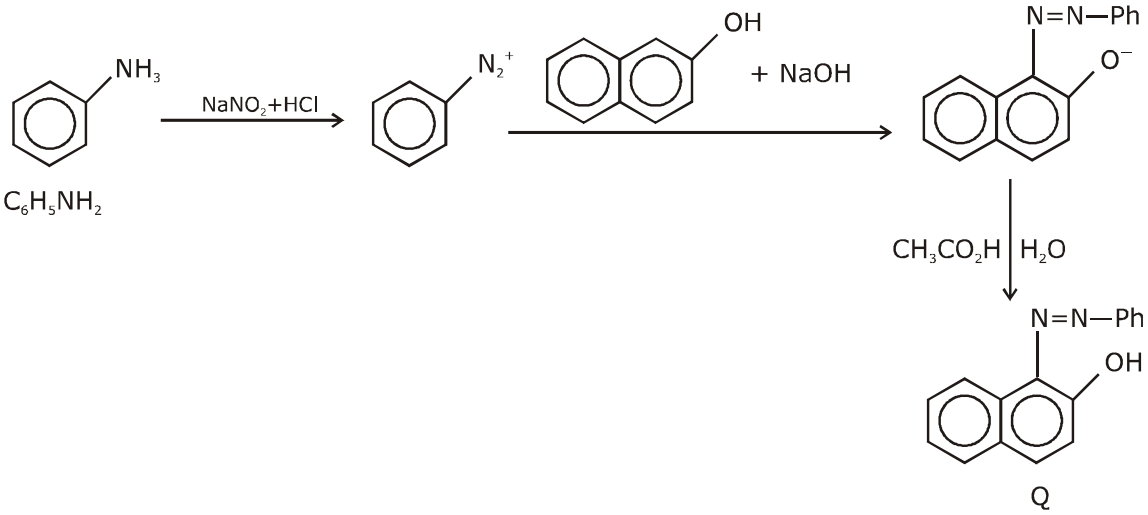
$= -4 \times 13.6 \times 1.6 \times 10^{-19}$ J/atom $\times 6.023 \times 10^{23}$ $\frac{\text{atom}}{\text{mol}}$

$= -4 \times 13.6 \times 1.6 \times 6.023 \times 10^4$ J/mole
$= -5242.42$ KJ/mol

16. Consider the reaction sequence from P to Q shown below. The overall yield of the major product Q from P is 75%. What is the amount in grams of Q obtained from 9.3 mL of P ?
(Use density of P = 1.00 g mL^{-1} ; Molar mass of C = 12.0, H= 1.0, O=16.0 and N = 14.0 g mol^{-1})
नीचे दर्शाए गए P से Q तक के अभिक्रिया क्रम पर विचार कीजिये। P से मुख्य उत्पाद Q की कुल लब्धि 75% है। P के 9.3 mL से प्राप्त Q के ग्राम में कितनी मात्रा है ? (उपयोग कीजिए P का घनत्व = 1.00 g mL^{-1} ; C का मोलर द्रव्यमान = 12.0, H= 1.0, O=16.0 तथा N = 14.0 g mol^{-1})

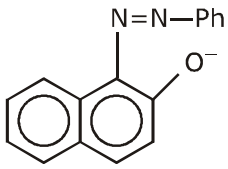


Ans. **18.6**



Molecular weight of aniline = M.wt of C_6NH_7 = 76 + 7 + 14 = 93
Density of P = 1 gm ml^{-1}

9.3 ml of P = 9.3 gm P = $\frac{9.3}{9.3} = 0.1$ mole of P

The mole ratio $PhNH_2$: PhN_2^+ : 

= 1 : 1 : 1

So the mole of Q formed will be 0.1 mole and extent of reaction is 100% but if it is 75% yield.

Then amount of Q = $0.1 \times \frac{75}{100}$ = 0.075 mol

The molecular formula of Q = $C_{16}H_{12}ON_2$
so M. wt. of Q = 16 × 12 + 12 × 1 + 16 + 2 × 14
= 192 + 12 + 16 + 28
= 248 gm
so amount of Q = 248 × 0.075
= 18.6 gm

17. Tin is obtained from cassiterite by reduction with coke. Use the data given below to determine the minimum temperature (in K) at which the reduction of cassiterite by coke would take place.
At 298 K: $\Delta_f H^0(SnO_2(s)) = -581.0$ kJ mol^{-1} , $\Delta_f H^0(CO_2(g)) = -394.0$ kJ mol^{-1}.
$S^0(SnO_2(s)) = 56.0$ J K^{-1} mol^{-1} , $S^0(Sn(s)) = 52.0$ J K^{-1} mol^{-1} ,
$S^0(C(s)) = 6.0$ J K^{-1} mol^{-1} , $S^0(CO_2(g)) = 210.0$ J K^{-1} mol^{-1} .
Assume that the enthalpies and the entropies are temperature independent.
टिन को कोक के साथ कम करने से कैसेटराईट से प्राप्त किया जाता है।
न्यूनतम तापमान (K में) में निर्धारित करने के लिए नीचे दिये ऑकडो का उपयोग कीजिए? जिस पर कोक द्धारा कैसटराईट की कमी होती है।
298 K पर : $\Delta_f H^0(SnO_2(s)) = -581.0$ kJ mol^{-1} , $\Delta_f H^0(CO_2(g)) = -394.0$ kJ mol^{-1}.
$S^0(SnO_2(s)) = 56.0$ J K^{-1} mol^{-1} , $S^0(Sn(s)) = 52.0$ J K^{-1} mol^{-1} ,
$S^0(C(s)) = 6.0$ J K^{-1} mol^{-1} , $S^0(CO_2(g)) = 210.0$ J K^{-1} mol^{-1} .
मान लीजिए कि एन्थैलीज तथा एन्ट्रोपीज स्वतंत्र ताप पर है।

Ans. **935**

$SnO_2(s) + C(s) \longrightarrow CO_2 + Sn$

ΔH = − 394 + 581
= + 187 KJ/mol
ΔS = 210 + 52 − 56 − 6
= 200 J/k mol
ΔG = 187 × 1000 − 200 × T

$$T = \frac{187 \times 1000}{200} = 935 \text{ K}$$

18. An acidified solution of 0.05 M Zn^{2+} is saturated with 0.1 M H_2S. What is the minimum molar concentration (M) of H^+ required to prevent the precipitation of ZnS ?
use K_{sp} (ZnS) = 1.25×10^{-22} and overall dissociation constant of H_2S , $K_{NET} = K_1K_2 = 1 \times 10^{-21}$.
0.05 M Zn^{2+} का एक अम्लीय विलयन 0.1 M H_2S के साथ संतप्त है। ZnS के अवक्षेपण को रोकने के लिए आवश्यक H^+ की न्यूनतम मोलर सान्द्रता (M) कितनी है।
उपयोग कीजिए–
K_{sp} (ZnS) = 1.25×10^{-22} H_2S का कुल वियोजन स्थिरांक, $K_{NET} = K_1K_2 = 1 \times 10^{-21}$.

Ans. **0.2**

$[Zn^{+2}]\,[S^{2-}] \leq K_{sp}$ (ZnS)

$$[S^{2-}] \leq \frac{5}{4} \times \frac{10^{-22}}{0.05}$$

$H_2S \rightleftharpoons 2H^+ + s^{2-}$

$$[S^{2-}] = \frac{K_{net} \times [H_2S]}{[H^+]^2}$$

$$\frac{K_{net} \times [H_2S]}{[H^+]^2} \leq \frac{5}{4} \times \frac{10^{-22}}{10^{-2} \times 5}$$

$$[H^+]^2 \geq \frac{10^{-21} \times 10^{-1} \times 4}{10^{-20}}$$

$[H^+]^2 \geq 4 \times 10^{-2}$

$[H^+] \geq 2 \times 10^{-1} = 0.2$

Alternate :

$[Zn^{+2}]\,[S^{2-}] \leq K_{sp}$

$$[S^{2-}] \leq \frac{5}{4} \times \frac{10^{-22}}{0.05} = \frac{1}{4} \times 10^{-20}$$

$H_2S \rightleftharpoons 2H^+ + S^{2-}$

$$[H^+]^2 = \frac{K_1K_2 \times [H_2S]}{[S^{2-}]} = \frac{10^{-21} \times 0.1}{[S^{2-}]}$$

$$[S^{2-}] = \frac{10^{-22}}{[H^+]^2} \leq \frac{1}{4} \times 10^{-20}$$

$[H^+]^2 \geq 4 \times 10^{-2}$

$[H^+] \geq 0.2$

JEE ADVANCED
27 September 2020
Mathematics Paper - 2

SECTION–1 (Maximum marks :18)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each questionis a **SINGLE DIGIT INTEGER ranging from 0 TO 9, BOTH INCLUSIVE.**
- For Each Question, enter the correctinteger corresponging to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme :</u>

Full marks : +3 If ONLY the correct integer is entered;
Zero Marks : 0 If the questio is unanswered.
Negative Marks : –1 In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, एक एकल अंक पूर्णांक है। दोनों सम्मिलित है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर दर्ज करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर के अनुरूप सही पूर्णांक दर्ज करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

Q.1 For a complex number z, let $\mathrm{Re}(z)$ denote the real part of z. Let S be the set of all complex numbers z satisfying $z^4 - |z|^4 = 4iz^2$, where $i = \sqrt{-1}$. Then the minimum possible value of $|z_1 - z_2|^2$, where $z_1, z_2 \in S$ with $\mathrm{Re}(z_1) > 0$ and $\mathrm{Re}(z_2) < 0$, is

Q.1 एक सम्मिश्र संख्या z के लिये माना $\mathrm{Re}(z)$, z के वास्तविक भाग को निरूपित करता है। माना $z^4 - |z|^4 = 4iz^2$, को सन्तुष्ट करने वाली सभी सम्मिश्र संख्याओ z का समुच्य S है, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है। तब $|z_1 - z_2|^2$ का न्यूनतम सम्भावित मान होगा। जहाँ $\mathrm{Re}(z_1) > 0$ तथा $\mathrm{Re}(z_2) < 0$, के साथ $z_1, z_2 \in S$ है –

Ans. **8**

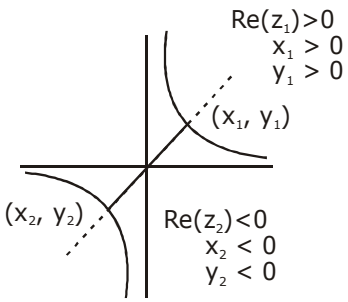
$z^4 - |z|^4 = 4iz^2$

$z^4 - |\bar{z}|^2|z|^2 = 4i\, z^2$

$z^2 (z^2 - (\bar{z})^2) = 4iz^2$

$z^2 = 0 \mid z^2 - (\bar{z})^2 = 4i$

Let z = x + iy



$z^2 - (\bar{z})^2 = 4i$
$(x + iy)^2 - (x - iy)^2 = 4i$
$xy = 1$
Now $(z_1 - z_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$
$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1 y_2$
$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1 (-x_2) + 2y_1(-y_2)$
Now AM $\geq$ GM
$\geq 8(x_1^2 x_2^2 y_1^2 y_2^2 x_1 x_2 y_1 y_2)^{1/8}$
≥ 8

Q.2 The probability that a missile hits a target successfully is 0.75 . In order to destroy the target completely, at least three successful hits are required. Then the minimum number of missiles that have to be fired so that the probability of completely destroying the target is NOT less than 0.95, is

Q.2 एक मिसाइल द्वारा सफलता पूर्वक लक्ष्म पर मारने की प्रायिकता 0.75 है। लक्ष्य को पूरी तरह नष्ट करने के लिए कम से कम तीन सफल मार की आवश्यकता है, तब मिसाइलों की न्यूनतम संख्या, जिनको दागा जाता है। ताकि लक्ष्य को सम्पूर्ण नष्ट करने की प्रायिकता 0.95 से कम न हो, होगी।

Ans. **6**

P(Hit) = 0.75 = 3/4 & P(Hitnot) = 0.25 = 1/4
P(targel Hit) $\geq$ 0.95
1 - P (tagent not hit in n throws) $\geq$ 0.95

$$1 - {}^nC_0 (\bar{H})^n - {}^n C_1 (\bar{H})^{n-1} . (H) - {}^n C_2 (\bar{H})^{n-2} (H)^2 \geq 0.95$$

$$1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n - n.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} . \frac{3}{4} - \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \geq 0.95$$

$$1 - 0.95 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{9n^2 - 3n + 2}{2}\right]$$

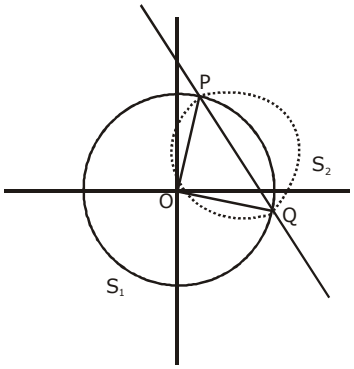
$$\left[9n^2 - 3n + 2\right] \leq \frac{4^n}{10}$$

Now check n = 6

Q.3 Let O be the centre of the circle $x^2 + y^2 = r^2$, where $r > \frac{\sqrt{5}}{2}$. Suppose PQ is a chord of this circle and the equation of the line passing through P and Q is $2x + 4y = 5$. If the centre of the circumcircle of the triangle OPQ lies on the line $x + 2y = 4$, then the value of r is

Q.3 माना O वत्त $x^2 + y^2 = r^2$, का केन्द्र है जहाँ $r > \frac{\sqrt{5}}{2}$ है। माना PQ इस वत्त की एक जीवा है तथा P एवं Q से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $2x + 4y = 5$ है। यदि त्रिभुज OPQ के परिवत्त का केन्द्र रेखा $x + 2y = 4$, पर स्थित है, तब r का मान होगा।

Ans. 2



$S_1 : x^2 + y^2 = r^2$ whre $r > \frac{\sqrt{5}}{2}$

now let $S_2 : x^2 + y^2 + ax + by = 0 \Rightarrow C_2; \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$

RA of $S_1 = 0$ & $S_2 = 0$ is PQ
PQ : RA : $S_1 - S_2 = 0$
PQ : $ax + by + r^2 = 0$
Given PQ : $2x + 4y - 5 = 0$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{r^2}{-5} \quad .....(1)$$

also centre of S_2 lies on $x + 2y = 4$

$$\Rightarrow \frac{-a}{2} - b = 4 \quad ....(2)$$

from (1) & (2)

$$\frac{-r^2}{-5} - \frac{4r^2}{-5} = 4$$

$- 5r^2 = -2o$
$r^2 = 4$
$r = 2$

Q.4 The trace of a square matrix is defined to be the sum of its diagonal entries. If A is a 2×2 matrix such that the trace of A is 3 and the trace of A^3 is -18 , then the value of the determinant of A is

Q.4 एक वर्ग आवयुह का अनुरेखण, इसके विकर्ण के अवयवो के योगफल को परिभाषित करता है। यदि A एक 2×2 का आव्युह इस प्रकार है कि A का अनुरेखण 3 है तथा A^3 का अनुरेखण −18 है, तब A के सारणिक का मान होगा −

Ans. **5**

Let $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow T_r(A)=3$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & 3-a\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}a^2+bc & 3b\\ 3c & cb+(3-a)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & 3-a\end{bmatrix}$

$T_r(A^3) = a^3 + abc + 3bc + 3bc + 3bc +(3-a)^2 3 - abc - a(3-a)^2$
$-18 = a^3 + 9bc + (3-a)^3$
$\Rightarrow a^3 + 9bc + 27 - a^3 - 3.3a (3 - a)= - 18$
$\Rightarrow a^2 - 3a + bc = -5$
Now $|A| = a(3 - a) - bc$
$= 3a - a^2 - bc$
$|A| = 5$

Q.5 Let the functions $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ and $g:(-1,1)\to(-1,1)$ be defined by

$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$ and $g(x)=x-[x]$

where [x] denotes the greatest integer less than or equal to x. Let $fog:(-1,1)\to\mathbb{R}$ be the composite function defined by (fog)(x) = f(g(x)). Suppose c is the number of points in the interval (-1,1) at which fog is NOT continuous, and suppose d is the number of points in the interval (-1,1) at which fog is NOT differentiable. Then the value of $c+d$ is

Q.5 माना फलन $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ तथा $g:(-1,1)\to(-1,1)$,

$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$ तथा $g(x)=x-[x]$ के द्वारा परिभाषित है, जहाँ [x], x से छोटे या बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है। माना $fog:(-1,1)\to\mathbb{R}$ एक संयुक्त फलन है जो (fog)(x) = f(g(x)) के द्वारा परिभाषित है। माना c अंतराल (−1,1) में बिन्दुओ की संख्या है जिस पर Fog संतत नही है तथा माना d अंतराल (−1,1) में बिन्दुओ की संख्या है जिस पर fog अवकलनीय नही है, तब $c+d$ का मान होगा।

Ans. **4**

$f(x) = |2x - 1| + |2x + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ -4x & x \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$g(x) = x - [x] = \{x\}$

$$\text{Now fog} = \begin{cases} 4g(x) & g(x) \geq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-1}{2} < g(x) < \frac{1}{2} \\ -4g(x) & g(x) \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{fog} = \begin{cases} 4\{x\} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 4\{x\} & \frac{-1}{2} \leq x < 0 \\ 2 & -1 < x < \frac{-1}{2} \\ 2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{fog} = \begin{cases} 4x & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(x+1) & \frac{-1}{2} \leq x < 0 \\ 2 & -1 < x < \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Now check
fog is not continuous at x = 0 only.

fog is not differentiable at x = $\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$

c = 1 & d = 3
c + d = 4

Q.6 The value of the limit

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}(\sin 3x+\sin x)}{\left(2\sin 2x\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\right)-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos 2x+\cos\frac{3x}{2}\right)}$$ is

Q.6 सीमा $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}(\sin 3x+\sin x)}{\left(2\sin 2x\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\right)-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos 2x+\cos\frac{3x}{2}\right)}$ का मान है –

Ans. **8**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}\left(\sin 3x+\sin x\right)}{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{7x}{2}+\cos\frac{5x}{2}-\sqrt{2}.2\cos^2 x-\cos\frac{3x}{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}\sin 2x\cos x}{2\sin x\sin\frac{x}{2}+2\sin 3x.\sin\frac{x}{2}-2\sqrt{2}\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{16\sqrt{2}\sin x\cos^2 x}{2\sin\frac{x}{2}\{2\sin 2x.\cos x\}-2\sqrt{2}\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{16\sqrt{2}\sin x}{2.4\sin\frac{x}{2}\sin x-2\sqrt{2}}$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{8.\frac{1}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{32}{8-4}=\frac{32}{4}=8$$

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- Section contains **SIX (06)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer the each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme:</u>

Full Marks	: +4	If only (all the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2 अन्य सभी स्थितियों में।

Q.7 Let b be a nonzero real number. Suppose $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a differentiable function such that $f(0)=1$ If the derivative f' of f satisfies the equation

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}$ for all $x\in\mathbb{R}$, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) If $b>0$, then f is an increasing function

(B) If $b<0$, then f is a decreasing function

(C) $f(x)f(-x)=1$ for all $x\in\mathbb{R}$

(D) $f(x)-f(-x)=0$ for all $x\in\mathbb{R}$

Q.7 माना b एक अशून्य वास्तविक संख्या है। माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(0)=1$ है। यदि f का अवकलज f' जो सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए समीकरण

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}$ को सन्तुष्ट करता है, तब निम्नलिखित कथनों में से कौनसा सत्य है।

(A) यदि $b>0$ है, तब f एक वर्धमान फलन है।

(B) यदि $b<0$ है, तब f एक हासमान फलन है।

(C) सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए $f(x)f(-x)=1$ है।

(D) सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए $f(x)-f(-x)=0$ है।

Ans. **A,C**

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{b^2+x^2}dx$$

$$\ln(f(x))=\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+c$$

put $x=0\Rightarrow c=0$

(A) $f(x)=e^{\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}$

$f(x)>0\ \forall\ x\in R\quad\because f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}>0\Rightarrow f(x)\uparrow$

(C) $f(x)\,f(-x)=e^{\left(\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}=e^0=1$

(D) $f(x)-f(-x)=e^{\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}-e^{-\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}$

for all $x\in R\neq 0$

Q.8 Let a and b be positive real numbers such that $a>1$ and $b<a.$ Let P be a point in the first quadrant that lies on the hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ Suppose the tangent to the hyperbola at P passes through the point $(1,0),$ and suppose the normal to the hyperbola at P cuts off equal intercepts on the coordinate axes. Let Δ denote the area of the triangle formed by the tangent at P, the normal at P and the x -axis. If e denotes the eccentricity of the hyperbola, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $1<e<\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}<e<2$ (C) $\Delta=a^4$ (D) $\Delta=b^4$

Q.8 माना a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याए इस प्रकार है कि $a>1$ तथा $b<a.$ है। माना P प्रथम चतुर्थांश में एक बिन्दु है जो अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ पर स्थित है। माना P पर अतिपरवलय की स्पर्शरेखा बिन्दु $(1,0),$ से गुजरती है तथा माना P पर अतिपरवलय का अभिलम्ब निर्देशी अक्षो पर समान अंतखण्ड काटती है। माना Δ, P पर स्पर्शरेखा, P पर अभिलंब तथा x-अक्ष द्वारा बने त्रिभुज के क्षेत्रफल को निरूपित करता है। यदि e अतिपरवलय की उत्केन्द्रता को व्यक्त करती है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है –

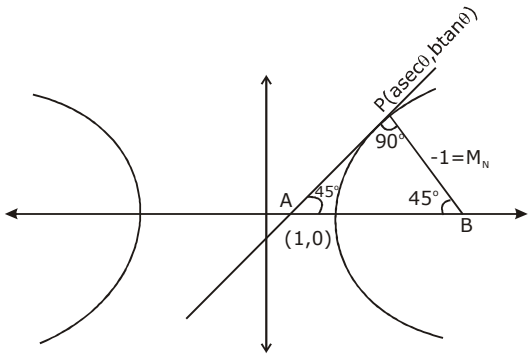
(A) $1<e<\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}<e<2$ (C) $\Delta=a^4$ (D) $\Delta=b^4$

Ans. **A,D**

$\because$ normal cuts euqal Intercepts

$\therefore M_N = -1$

$M_T = 1$



T at P $\Rightarrow \frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$

pass (1, 0)

$\sec\theta = a$

$\because M_T = 1 \Rightarrow +\left(\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}\right)=1 \Rightarrow b=\tan\theta$

$b^2 = a^2(e^2-1) \Rightarrow e^2-1=\sin^2\theta \Rightarrow e^2=1+\sin^2\theta$ $(\because 0<\theta<\pi/2)$

$1<e^2<2 \Rightarrow 1<e<\sqrt{2}$

Area $\Delta = \frac{1}{2}(AP)(AP)$ $\because AP = BP$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\sec^2\theta\right)^2+\left(\tan^2\theta\right)^2\right]=\tan^4\theta=b^4$

Q.9 Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be functions satisfying

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ and $f(x)=xg(x)$

for all $x,y\in\mathbb{R}$. If $\lim_{x\to 0} g(x)=1,$ then which of the following statements is/are TRUE?

(A) f is differentiable at every $x\in\mathbb{R}$

(B) If $g(0)=1,$ then g is differentiable at every $x\in\mathbb{R}$

(C) The derivative $f'(1)$ is equal to 1

(D) The derivative $f'(0)$ is equal to 1

Q.9 माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ तथा $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ फलन है। जो सभी $x,y\in\mathbb{R}.$ के लिए

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ तथा $f(x)=xg(x)$ को सन्तुष्ट करते है। यदि $\lim_{x\to 0} g(x)=1,$ है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) f प्रत्येक $x\in\mathbb{R}$ पर अवकलनीय है।

(B) यदि $g(0)=1,$ है, तब g प्रत्येक $x\in\mathbb{R}$ पर अवकलनीय है।

(C) अवकलज $f'(1)$, 1 के बराबर है।

(D) अवकलज $f'(0)$, 1 के बराबर है।

Ans. **A,B,D**

f'(x + y).1 = f'(y) + f(x) f'(y)
put y = 0
f'(x) = f'(0) + f(x)f'(0)
xg'(x) + g(x) = f'(0) + f(x). f'(0)
xg'(x) + g(x) = 1 + f(x)
f'(x) = f(x) + 1
f(0) = f'(0) + 1
f(0) = 0
f(1) = f(1) + 1

g(0) = 1
f'(x) = xg'(x) + g(x)
f'(0) = g(0) = 1

$$\int \frac{f(x)}{f(x)+1}dx = \int dx$$

$\Rightarrow$ ln(f(x) + 1) = x + c
put x = 0
c = 0
$f(x) = e^x - 1$
f(1) = e - 1
f'(1) = f(1) + 1 = e - 1 + 1 = e

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$$

we have check differentiability at x = 0

$$g'(0^+) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$g'(0^-) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{-x}-1}{-x}-1}{-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

g(x) is aiarecate for dex

M-II

to find function

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+f(x)f(x)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = (f(x)+1)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

$$= (f(x)+1)\lim_{h\to 0}\frac{h\ g(h)}{h}$$

f'(x) = f(x) + 1

Q.10 Let $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ be real numbers such that $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$ and $\alpha+\gamma=1$. Suppose the point (3,2,-1) is the mirror image of the point (1,0,-1) with respect to the plane $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$. Then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $\alpha+\beta=2$ (B) $\delta-\gamma=3$ (C) $\delta+\beta=4$ (D) $\alpha+\beta+\gamma=\delta$

Q.10 माना $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ वास्तविक संख्याएं इस प्रकार है कि $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$ तथा $\alpha+\gamma=1.$ है। माना बिन्दु (3,2,-1) समतल $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ के सापेक्ष बिन्दू (1,0,-1) का दर्पण प्रतिबिम्ब है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) $\alpha+\beta=2$ (B) $\delta-\gamma=3$ (C) $\delta+\beta=4$ (D) $\alpha+\beta+\gamma=\delta$

Ans. **A,B,C**

pp' is normal to given plane

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{0}=\lambda(\text{let})$$

$\alpha=\beta,\gamma=0$

$\therefore\ \alpha+\gamma=1\Rightarrow\alpha=1=\beta$

$\alpha+\beta=2$

Q pt is mid pt of pp' = (2, 1, -1)

lie on plane

$2\alpha+\beta-\gamma=\delta$

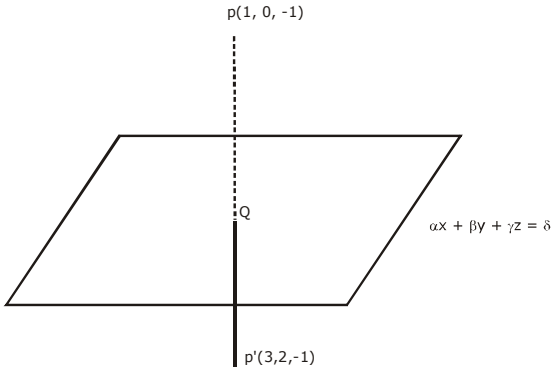
put α,β,γ

$\delta=3$

$\delta-\gamma=3$

$\delta+\beta=4$

$\alpha+\beta+\gamma=2\neq\delta$



Q.11 Let a and b be positive real numbers. Suppose $\overrightarrow{PQ}=a\hat{i}+b\hat{j}$ and $\overrightarrow{PS}=a\hat{i}-b\hat{j}$ are adjacent sides of a parallelogram PQRS .Let $\vec{u}$ and $\vec{v}$ be the projection vectors of $\vec{w}=\hat{i}+\hat{j}$ along $\overrightarrow{PQ}$ and $\overrightarrow{PS}$, respectively. If $|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{w}|$ and if the area of the parallelogram PQRS is 8, then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) $a+b=4$

(B) $a-b=2$

(C) The length of the diagonal PR of the parallelogram PQRS is 4

(D) $\vec{w}$ is an angle bisector of the vectors $\overrightarrow{PQ}$ and $\overrightarrow{PS}$

Q.11 माना a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना $\overrightarrow{PQ}=a\hat{i}+b\hat{j}$ तथा $\overrightarrow{PS}=a\hat{i}-b\hat{j}$ एक समान्तर चतुर्भुज PQRS की आसन्न भुजाएँ है। माना $\vec{u}$ तथा $\vec{v}$ क्रमशः $\overrightarrow{PQ}$ तथा $\overrightarrow{PS}$, के अनुदिश $\vec{w}=\hat{i}+\hat{j}$ का प्रक्षेप सदिश है । यदि $|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{w}|$ है तथा यदि समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल 8 है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ,

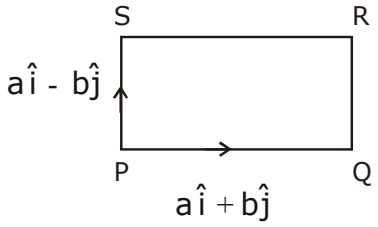
(A) $a+b=4$

(B) $a-b=2$

(C) समान्तर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR की लम्बाई 4 है।

(D) $\vec{w}$ सदिशो $\overrightarrow{PQ}$ तथा $\overrightarrow{PS}$ का एक कोण अर्द्धक है।

Ans. **A,C**



$$\vec{u} = \frac{\vec{w}.\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}$$

$$= \frac{(\hat{i}+\hat{j}).(a\hat{i}+b\hat{j})}{|a\hat{i}+b\hat{j}|}$$

$$= \frac{(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{v} = \frac{(\vec{w}).\overrightarrow{ps}}{|\overrightarrow{ps}|} = \frac{(\hat{i}+\hat{j}).(a\hat{i}-b\hat{j})}{|a\hat{i}-b\hat{j}|} = \frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{w}|$

$$\frac{(a+b)|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{a}-\vec{b}) = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 2a = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$2a^2 = 2b^2$

$a = b$

Area of parallelogram = $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 0 \\ a & -b & 0 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \left|-2ab\hat{k}\right| = 8$$

$ab = 4 \Rightarrow a^2 = 4$

$a = 2 = b$

$a + b = 4$

$a - b = 0$

Length of diagonal of parallelogram = $\left|\left(a\hat{i}+b\hat{j}\right)+\left(a\hat{i}-b\hat{j}\right)\right|$

= 2a = 4

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}=2a\hat{i},2b\hat{j}\neq\lambda\vec{w}$

Q.12 For nonnegative integers s and r, let

$$\binom{s}{r}=\begin{cases}\dfrac{s!}{r!(s-r)!} & \text{if } r\le s\\ 0 & \text{if } r>s\end{cases}$$

For positive integers m and n, let

$$g(m,n)=\sum_{p=0}^{m+n}\frac{f(m,n,p)}{\binom{n+p}{p}}$$

where for any nonnegative integer p,

$$f(m,n,p)=\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n+i}{p}\binom{p+n}{p-i}$$

Then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $g(m,n)=g(n,m)$ for all positive integers m, n

(B) g(m, n+1)=g(m+1, n) for all positive integers m, n

(C) g(2m, 2n)=2 g(m, n) for all positive integers m, n

(D) g(2m, 2n)= $(g(m, n))^2$ for all positive integers m, n

Q.12 अऋणात्मक पूर्णांक s तथा r के लिए माना

$$\binom{s}{r}=\begin{cases}\dfrac{s!}{r!(s-r)!} & \text{if } r\le s\\ 0 & \text{if } r>s\end{cases}$$ है।

धनात्मक पूर्णांक m तथा n के लिए माना

$$g(m,n)=\sum_{p=0}^{m+n}\frac{f(m,n,p)}{\binom{n+p}{p}}$$ है।

जहाँ किसी अऋणात्मक पूर्णांक p के लिए

$$f(m,n,p)=\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n+i}{p}\binom{p+n}{p-i}$$

है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) $g(m,n)=g(n,m)$ सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(B) g(m, n+1)=g(m+1, n) सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(C) g(2m, 2n)=2 g(m, n) सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(D) g(2m, 2n)=(g(m, n))^2 सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

Ans. A,B,D

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \cdot {}^{n+i}C_p \cdot {}^{n+p}C_{p-i}$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \frac{\lfloor n+i}{\lfloor p \lfloor n+i-p} \cdot \frac{\lfloor n+p}{\lfloor p-i \lfloor n+i}$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \cdot \left(\frac{\lfloor n+p}{\lfloor p . \lfloor n}\right)\left(\frac{\lfloor n}{\lfloor n+i-p \lfloor p-i}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \left({}^{n}C_{p-i}\right)\left({}^{n+p}C_p\right)$$

$\Rightarrow {}^{n+p}C_p \, [{}^{m}C_0 \cdot {}^{n}C_p + {}^{m}C_1 {}^{n}C_{p-1} + ... + {}^{m}C_m {}^{n}C_{p-m}]$

coffi x^p in $(1+x)^n (x+1)^m$

f(m,n,p) = $({}^{n+p}C_p)$ $({}^{m+n}C_p)$

$$g(m,n) = \sum_{p=0}^{m+n} {}^{m+n}C_p = 2^{m+n}$$

g(m, n) = g(n,m)

g(2m, 2n) = $2^{2(m+n)} = (2^{m+n})^2 = (g(m,n))^2$

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer the each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme:</u>

  Full Marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;

  Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।

  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

Q.13 An engineer is required to visit a factory for exactly four days during the first 15 days of every month and it is mandatory that no two visits take place on consecutive days. Then the number of all possible ways in which such visits to the factory can be made by the engineer during $1-15$ June 2021 is

Q.13 एक अभियता को प्रत्येक महिने के पहले 15 दिनो के दौरान ठीक चार दिनो के लिए एक कारखाने का दौरा करना आवश्यक है तथा यह अनिवार्य है कि लगातार दो दिन कोई यात्रा न हो, तब सभी सम्भावित तरिको की संख्या जिसमें कारखाने में इस तरह के दौरे अभियंता द्वारा $1-15$ जून 2021 के दौरान किये जा सकते है, होगी।

Ans. **495.00**

To select = 4 days

not selected days = 11 days

gaps = 12

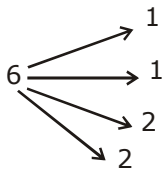
$$\therefore {}^{12}C_4 = \frac{12\times 11\times 5\times 9}{24} = 495$$

Q.14 In a hotel, four rooms are available. Six persons are to be accommodated in these four rooms in such a way that each of these rooms contains at least one person and at most two persons. Then the number of all possible ways in which this can be done is

Q.14 एक होटल में चार कमरे उपलब्ध है। इन चार कमरो में छः व्यक्तियो को इस प्रकार समायोजित करते है। इनमें से प्रत्येक कमरे में कम से कम एक व्यक्ति तथा अधिकतम दो व्यक्ति हो। तब सभी सम्भावित तरिको की संख्या जिसमें यह किया जा सकता है, होगी।

Ans. **1080.00**

by grouping



$$\therefore \frac{6!}{1!1!2!2!2!2!}\times 4!$$

$$\Rightarrow \frac{720}{2\times 2\times 2\times 2}\times 24$$

= 1080

Q.15 Two fair dice, each with faces numbered 1,2,3,4,5 and 6, are rolled together and the sum of the numbers on the faces is observed. This process is repeated till the sum is either a prime number or a perfect square. Suppose the sum turns out to be a perfect square before it turns out to be a prime number. If p is the probability that this perfect square is an odd number, then the value of 14 p is

Q.15 दो उचित पासे, जिसकी प्रष्ठ संख्या 1,2,3,4,5 तथा 6, है प्रत्येक को एक साथ लुडकाया जाता है तथा प्रष्ठों पर संख्याओं के योगफल का निरिक्षण किया जाता है। यह प्रक्रिया तब दोहराई जाती है, जब तक कि योग एक अभाज्य संख्या या एक पूर्ण वर्ग न हो। माना योग एक अभाज्य संख्या उपस्थित होने के पहले एक पूर्ण होता है। यदि P प्रायिकता है कि इसका पूर्ण वर्ग एक विषम संख्या है, तब 14 p का मान होगा –

Ans. **8.00**

Sum is prime =
2 (1,1)
3 (1,2)(2,1)
5 (2,3)(3,2) (1,4) (4,1)
7 (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)
11 (5,6) (6,5)

P(prime) = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Q.16 Let the function $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ Then the value of

$$f\left(\frac{1}{40}\right) + f\left(\frac{2}{40}\right) + f\left(\frac{3}{40}\right) + \cdots + f\left(\frac{39}{40}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$ is

Q.16 माना फलन $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ के द्वारा परिभाषित है,तब

$$f\left(\frac{1}{40}\right) + f\left(\frac{2}{40}\right) + f\left(\frac{3}{40}\right) + \cdots + f\left(\frac{39}{40}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$ का मान होगा –

Ans. **19.00**

f : [0, 1] $\to$ R

$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$

$f(1 - x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x} + 2}$

$= \frac{4}{4 + 2.4^x}$

$\Rightarrow \frac{2}{2 + 4^x}$

$\therefore$ f(x) + f(1-x) = 1

$$f\left(\frac{1}{40}\right)+f\left(\frac{2}{40}\right)+.....+f\left(\frac{39}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ 19 pairs + $f\left(\frac{20}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$ = 19

Q.17 Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a differentiable function such that its derivative f' is continuous and $f(\pi)=-6$

If $F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ is defined by $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ and if

$\int_0^{\pi}\left(f'(x)+F(x)\right)\cos x dx=2$ then the value of $f(0)$ is

Q.17 माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि इसका अवकलज f' संतत् है तथा $f(\pi)=-6$ है। यदि

$F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ के द्वारा परिभाषित है तथा यदि

$\int_0^{\pi}\left(f'(x)+F(x)\right)\cos x dx=2$ है। तब f(0) का मान होगा –

Ans. 4.00

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt$$

f'(x) = f(x)

$$\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\ dx+\int_0^{\pi} \underset{I}{f(x)}\underset{II}{\cos x}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\ dx+f(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\ dx$$

$$\int_0^{\pi}\left(f'(x)\cos x-f(x)\sin x\right)dx$$

$$\int_0^{\pi}\frac{d}{dx}\left(f(x)\cos x\right)dx=2$$

$$f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}=2$$

f(π) (-1) - f(0) = 2
6 - f(0) = 2
f(0) = 4

Q.18 Let the function $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ be defined by $f(\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^4$.

Suppose the function f has a local minimum at θ precisely when $\theta\in\{\lambda_1\pi,\ldots,\lambda_r\pi\}$, where $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_r<1$. Then the value of $\lambda_1+\cdots+\lambda_r$ is

Q.18 माना फलन $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^4$ के द्वारा परिभाषित है।

माना फलन f, θ पर ठीक ठीक एक स्थानिय निम्निष्ठ रखता है। जब $\theta\in\{\lambda_1\pi,\ldots,\lambda_r\pi\}$, है जहाँ $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_r<1$. है। तब $\lambda_1+\cdots+\lambda_r$ का मान है।

Ans. **0.50**

$f(\theta) = (1 + \sin2\theta) + (1 - \sin2\theta)^2$

$= 1 + \sin2\theta + 1 + \sin^2 2\theta - 2\sin2\theta$

$= \sin^2 2\theta - \sin2\theta + 2$

$$= \left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$\theta \in [0, \pi]$

$\therefore 2\theta \in [0, 2\pi]$

$f(\theta)$ min. when $\sin2\theta = \frac{1}{2}$

$$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{12} \qquad \lambda_2 = \frac{5}{12}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} = 0.50$